

Extremaleigenschaft nichtlinearer Splines

Johann Baumeister

1974



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554604_0026

Extremaleigenschaft nichtlinearer Splines

Inaugural-Dissertation zur Erlangung des
Doktorgrades der Fakultät für Mathematik
an der Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von
Johann Baumeister
aus Oberzeitldorn
im Juni 1974



1. Berichterstatter: Prof. Dr. G. Hämmerlin
2. Berichterstatter: Doz. Dr. K.-H. Hoffmann

Tag der mündlichen Prüfung: 24. Juli 1974

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung	1
Kapitel I: Nichtlineare Verallgemeinerungen kubischer Splines	7
§1 Problemstellung	7
§2 Die Interpolationsaufgabe für A - Splines	12
§3 Konvexe Funktionen	21
§4 Extremaleigenschaft interpolierender A - Splines	32
§5 Berechenbarkeit von A - Splines	39
Kapitel II: Splines in Orlicz-Räumen	47
§6 Orlicz-Räume	47
§7 Die Räume $H_{A,m}(I)$	54
§8 Splines in Orlicz-Räumen	58
§9 Hermite-Birkhoff-Interpolation mit Ungleichungen	73
Literatur	82

Einleitung

Die Theorie der Splines nahm ihren Anfang durch die Untersuchung gewisser linearer Interpolationsaufgaben (Schoenberg [19]). Eine einfache Aufgabe dieser Art lautet:

Gegeben: $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit:

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(IA) Gesucht: $f \in C^2([x_0, x_n])$ mit:

$$i) \quad f(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n$$

$$ii) \quad f|_{[x_i, x_{i+1}]} \text{ Polynom vom Grad } \leq 3, \quad i = 0, \dots, n-1.$$

Eine Lösung der Interpolationsaufgabe (IA) heißt ein interpolierender kubischer Spline.

Von entscheidender Bedeutung für die Theorie der Splines in ihrer heutigen Form war der Nachweis einer Extremaleigenschaft der kubischen Splines:

Es sind äquivalent:

a) i) f ist Lösung von (IA)

$$ii) \quad f''(x_0) = f''(x_n) = 0$$

$$b) \quad \int_{x_0}^{x_n} f''(t)^2 dt = \min \left\{ \int_{x_0}^{x_n} g''(t)^2 dt \mid g \in C^2([x_0, x_n]) \wedge g(x_i) = y_i, i = 0, \dots, n \right\}$$

Dieser Satz von Holladay [7] hat zu folgender Definition von konvexen Splines in Hilberträumen geführt:

Gegeben: - Hilberträume X, Y (mit Norm $\|\cdot\|_X$ bzw. $\|\cdot\|_Y$)
 - $R : X \rightarrow Y$ stetiger linearer Operator
 - $K \subset X$ konvexe Menge

Gesucht: $k_0 \in K$ mit: $\|R(k_0)\|_Y = \min \{ \|R(k)\|_Y \mid k \in K \} \quad (*)$

Eine Minimallösung $k_0 \in K$ von $(*)$ heißt dann ein Spline (bezgl. R und K).

Untersucht wurden Probleme dieser Art hinsichtlich Existenz, Eindeutigkeit und Berechenbarkeit z. B. von M. Golomb [5a], P. M. Anselone und P. J. Laurent [1], M. Atteia [2] und P. J. Laurent [12]. Speziell in Funktionenräumen wurde das Splineproblem von J. W. Jerome und L. L. Schumaker [10] behandelt. Existenz und Eindeutigkeit von Splines sind unter relativ schwachen Voraussetzungen an R und K , wie sie bei wesentlichen Beispielen in den Funktionenräumen stets gegeben sind, zu beweisen. Mit Charakterisierungssätzen für beste Approximationen in Hilberträumen erhält man unmittelbar einen Charakterisierungssatz für Splines. Für den Spezialfall der interpolierenden Splines, d. h. $K = x_0 + U$ mit: $x_0 \in X$, U linearer Teilraum in X , lautet dieser unter Voraussetzungen, die auch hinreichend für Existenz und Eindeutigkeit sind, folgendermaßen:¹⁾

Es sind äquivalent für $k_0 \in x_0 + U$:

$$a) \quad \|R(k_0)\|_Y = \min \{ \|R(k)\|_Y \mid k \in K \} \quad (\text{Extremaleigenschaft})$$

$$b) \quad R^* \circ R(k_0) \in U^\perp \quad 2) \quad (\text{Orthogonalitätsrelation})$$

Aus der Orthogonalitätsrelation erkennt man sofort, daß der "Splineoperator", der jedem $x_0 \in X$ den Spline $k_0 \in x_0 + U$ zuordnet, linear ist.

Eine naheliegende Verallgemeinerung ist, das Splineproblem statt in Hilberträumen in Banachräumen zu untersuchen. Dies ist in allgemeiner Form in einer Arbeit von R. Holmes [8b] für inter-

1) siehe etwa [5a].

2) R^* ist der zu R adjungierte Operator, $U^\perp$ ist das orthogonale Komplement von U .

polierende Splines geschehen; dabei zeigte sich, daß obiger "Splineoperator" i. a. nichtlinear ist. In Funktionenräumen ist dieses Problem im wesentlichen von M. Golomb [5b] behandelt worden. Als Charakterisierungssatz erhält man mit Hilfe der Approximationstheorie eine ähnliche Äquivalenz wie in Hilberträumen.

Ausgehend von dieser Äquivalenz bieten sich im wesentlichen zwei Möglichkeiten der Verallgemeinerung des Splineproblems an, je nachdem, ob man die "Extremaleigenschaft" oder die "Orthogonalitätsrelation" als definierende Eigenschaft ansieht.

Im Kapitel I dieser Arbeit werden interpolierende (Funktionen-) Splines untersucht, die in Anlehnung an die Orthogonalitätsrelation definiert werden (§2). Diese Klasse von Splines schließt zum Teil Splinefunktionen von der Art ein, wie sie von R. Schaback [18] betrachtet wurden. Eine interessante Teilklasse ist die der "rationalen Splines" r , die stückweise von folgender Form sind:

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad p \in P_2, \quad q \in P_1. \quad 1)$$

Für diese interpolierenden Splines wird in §4 gezeigt, daß sie unter allen interpolierenden Funktionen, die zweimal stetig differenzierbar sind, dadurch ausgezeichnet sind, daß sie ein konvexes Variationsproblem lösen. Die Kenntnis dieser Extremaleigenschaft gestattet es, ein duales Variationsproblem anzugeben und daraus Existenzaussagen abzuleiten (§4). In §5 wird dieses duale Variationsproblem bei der Berechnung der inter-

1) $P_n := \{p \mid p \text{ Polynom vom Grad } \leq n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

polierenden Splines benützt. Den Abschluß des §5 bilden numerische Vergleiche verschiedener Splinetypen. Dabei zeigt sich, daß bereits die Interpolationsdaten einen Hinweis darauf geben, welcher Splinetypp hinsichtlich der Fehlerabschätzung zur Interpolation gewählt werden sollte.

Bei den Untersuchungen in §4 treten konvexe Funktionale auf, die bei der Definition von Orlicz-Räumen [15], welche Banachräume meßbarer Funktionen sind, eine entscheidende Rolle spielen und in gewisser Weise die Norm induzieren; Beispiele für Orlicz-Räume sind die L_p -Räume ($1 \leq p \leq \infty$). Diese Räume gestatten es, die Untersuchungen in Kapitel I für gewisse Splinetypen in eine allgemeinere Problemstellung einzuordnen.

Orlicz-Räume spielen unter anderem eine Rolle in der Elastizitäts- und Plastizitätstheorie [6]. Eine breite Darstellung der Theorie dieser Räume mit Anwendungen in der Theorie der Integralgleichungen ist in einem Buch von Krasnoselskii und Rutickii [11] zu finden. In einem allgemeineren Rahmen werden sie von W. Luxemburg [13] behandelt; in §6 werden daraus die im weiteren Verlauf benötigten Ergebnisse aufgeführt.

Orlicz-Räume $L_A(I)$ (hier: I Intervall in $\mathbb{R}$, allgemeiner: I Menge, auf der ein Maß definiert ist) werden durch gewisse konvexe, unterhalbstetige Funktionen $A : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ ¹⁾ definiert. Eine entscheidende Rolle spielt dabei folgendes konvexe Funktional:

$$\begin{aligned} 1) \text{ Für } L_p(I), 1 \leq p < \infty : A(u) &:= p^{-1} u^p, \\ \text{für } L_\infty(I) : A(u) &:= \begin{cases} 0 & , u \leq 1 \\ \infty & , u > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\rho_A : L_A(I) \ni f \mapsto \int_I A(|f(t)|) dt \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \quad (\text{Modular})$$

Von einem solchen Raum $L_A(I)$ ausgehend, wird in §7 in analoger Weise, wie dies für $L_p(I)$, $1 \leq p < \infty$, geschieht¹⁾, ein Banachraum $H_{A,m}(I)$ von Funktionen mit Differenzierbarkeitseigenschaften definiert.

In §8 wird dann folgendes Problem untersucht:

Gegeben: - $L_A(I)$ ²⁾, $H_{A,m}(I)$

- $R : H_{A,m}(I) \rightarrow L_A(I)$ stetiger linearer Operator

- $K \subset H_{A,m}$ konvexe Menge

(N) Gesucht: $k_0 \in K$ mit: $\|R(k_0)\|_A = \min \{\|R(k)\|_A \mid k \in K\}$

(M) Gesucht: $k_0 \in K$ mit: $\rho_A(R(k_0)) = \min \{\rho_A(R(k)) \mid k \in K\} < \infty$

Eine Lösung von (N) heißt N_A -Spline (Norm-Spline), eine Lösung von (M) heißt M_A -Spline (Modular-Spline). Die Definition der N_A -Splines entspricht der in [8b] verwendeten Definition; in den L_p -Räumen ($1 \leq p < \infty$) stimmt die Definition der N_A -Splines mit der der M_A -Splines überein, da stets gilt:

$$\rho_A(f) = p^{-1} \|f\|_p^p.$$

Untersucht wird die Existenz- und Charakterisierungsfrage. Der allgemeine Existenzsatz (Satz (8.12)) ist von ähnlicher Art, wie der in [9a], [9b] für $H_{\infty,m}$ -Splines gegebene, das Problem der Hermite-Birkhoff-Interpolation wird damit erfaßt. In §9 werden die Ergebnisse des §8 auf Probleme von der Art angewendet, wie sie von O. L. Mangasarian und L. L. Schumaker [14] mit Hilfe der Kontrolltheorie behandelt werden.

Ein wesentliches Hilfsmittel bei den Untersuchungen stellt die

1) Siehe etwa [4], S.157

2) Die Norm in $L_A(I)$ wird mit $\|\cdot\|_A$ bezeichnet.

Theorie der konvexen Funktionen dar. Diese wird im §3, soweit sie benötigt wird, bereitgestellt.

Herrn Prof. Dr. G. Hämmerlin und Herrn Dr. K.-H. Hoffmann
danke ich für die Unterstützung und Betreuung.

Kapitel I: Nichtlineare Verallgemeinerungen kubischer Splines

§1 Problemstellung

In diesem Abschnitt betrachten wir eine Interpolationsaufgabe, wie sie z. B. von R. Schaback [18] behandelt wurde.

1.1 Eine Interpolationsaufgabe

Gegeben: - Endliches Intervall $I:=[a,b]$;
- Zerlegung von I : $t_0:=a < t_1 < \dots < t_{n+1}:=b$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;
- Teilmengen T_i , $0 \leq i \leq n$, von $C^2([t_i, t_{i+1}])$;
- $y \in \mathbb{R}^{n+4}$ ($y=(y'_0, y_0, \dots, y_{n+1}, y'_{n+1})$).

Gesucht: $f_0 \in C^2([I])$ mit: 1) $f_0(t_i) = y_i$, $0 \leq i \leq n+1$;
2) $f'_0(a) = y'_0$, $f'_0(b) = y'_{n+1}$;
3) $f_0|_{[t_i, t_{i+1}]} \in T_i$, $0 \leq i \leq n$.

Mit P_n , $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, wird im folgenden stets die Menge der Polynome vom Grad $\leq n$ bezeichnet.

(1.1) Beispiele:

Sei $i \in \{0, \dots, n\}$.

1) $T_i := P_3$.

2) $T_i := R_{2,1} := \{f \in C^2([t_i, t_{i+1}]) \mid f = p \cdot q^{-1}, p \in P_2, q \in P_1\}$.

3) $T_i := \{f \in C^2([t_i, t_{i+1}]) \mid f(t) = a \cdot \exp(bt) + ct + d, a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$.

Bei der Behandlung der Existenzfrage ist ein i. a. nichtlineares Gleichungssystem auf seine Lösbarkeit zu untersuchen. Wird die Interpolationsaufgabe für kubische Splines ($T_i = P_3$ für $i=0, \dots, n$) gestellt, so hat man ein lineares Gleichungssystem zu betrachten; dieses Gleichungssystem besitzt für jedes $y \in \mathbb{R}^{n+4}$ genau eine Lösung.

Für das I. Kapitel sei nun das Intervall I und die Zerlegung von I fest gewählt. Ein Vektor $y \in \mathbb{R}^{n+4}$ von der Form $(y'_0, y_0, \dots, y_{n+1}, y'_{n+1})$ heißt ein Interpolationsvektor (abgekürzt: $y \in \mathbb{R}^{n+4}$ IPV).

1.2 Die Interpolationsaufgabe für kubische Splines

Bekanntlich ist der kubische Spline, der die Interpolationsaufgabe in 1.1 löst, dadurch ausgezeichnet, daß er Lösung eines Variationsproblems ist. Dieser Zusammenhang wird nun formuliert und analysiert.

(1.2) Bezeichnungen:

a) $H_{\infty,2}(I) := \{f \in C^1(I) \mid f' \text{ absolut stetig} \wedge f'' \in L_{\infty}(I)\}$.

b) $R : H_{\infty,2}(I) \ni f \mapsto f'' \in L_{\infty}(I)$.

c) Sei $y \in \mathbb{R}^{n+4}$ IPV.

$V(y) := \{f \in H_{\infty,2}(I) \mid f(t_i) = y_i, 0 \leq i \leq n+1 \wedge f'(a) = y'_0, f'(b) = y'_{n+1}\}$.

d) $M := V(\theta)$ (θ Nullvektor in $\mathbb{R}^{n+4}$).

e) $h_i := t_{i+1} - t_i$, $i=0, \dots, n$.

(1.3) Folgerungen:

1. $H_{\infty,2}(I)$ ist mit: $\|\cdot\| : H_{\infty,2}(I) \ni f \mapsto \|f\|_{\infty} + \|f''\|_{\infty}$ ein Banachraum.

2. R ist ein stetiger surjektiver linearer Operator.

3. M ist ein abgeschlossener linearer Teilraum von $H_{\infty,2}(I)$.

Beweis: Siehe etwa [4], S.140 ff. ■

Für einen kubischen Spline ($T_i = P_3$ für $i=0, \dots, n$ in 1.1) hat man folgenden Charakterisierungssatz (siehe etwa [10]):

(1.4) Es sind äquivalent für $f_0 \in H_{\infty,2}(I)$:

- a) $\int_1 f_0''(t)^2 dt = \min \left\{ \int_1 f''(t)^2 dt \mid f \in V(Y) \right\}.$
- b) i) $f_0 \in V(Y) \cap C^2(I);$
 ii) $f_0|_{[t_i, t_{i+1}]} \in P_3$ für $i=0, \dots, n.$
- c) i) $f_0 \in V(Y) \cap C^2(I);$
 ii) $f_0''|_{[t_i, t_{i+1}]} \in P_1$ für $i=0, \dots, n.$
- d) i) $f_0 \in V(Y) \cap C^2(I);$
 ii) $f_0''(t) = h_i^{-1} f_0''(t_{i+1})(t - t_i) + h_i^{-1} f_0''(t_i)(t_{i+1} - t)$
 falls $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i=0, \dots, n.$

Die wesentliche Aussage von (1.4) ist die Äquivalenz $a) \Leftrightarrow b)$,
 die Aussagen c) und d) sind nur Umformungen von b).

1.3 Eine Basis von $R(M)^1$

Im folgenden wird eine Funktion $f \in L_1(I)$ stets mit dem Funktional $f^* \in L_{\infty}(I)^*$ identifiziert, das durch sie in folgender Weise definiert wird:

$$f^* : L_{\infty}(I) \ni g \mapsto \int_1 f(t)g(t)dt \in \mathbb{R}.$$

Mit R^* wird der adjungierte Operator von R bezeichnet; seine Definition lautet:

$$\begin{aligned} R^* : L_{\infty}(I)^* \ni \lambda &\mapsto R^*(\lambda) \in H_{\infty,2}(I)^* \quad \text{mit:} \\ R^*(\lambda)(g) &= \lambda(R(g)) \quad \text{für } g \in H_{\infty,2}(I). \end{aligned}$$

Damit erhält man:

(1.5) Lemma:

Es gilt: i) $R^*(R(M)^\perp) = P_1^\perp \cap M^\perp$.

ii) $\dim(R(M)^\perp) = n+2$.

Beweis: Es gilt: $Z(R) := \{f \in H_{\infty,2}(I) \mid R(f) = 0\} = P_1$.

Da $\text{Bild}(R^*) = Z(R)^\perp$ gilt (siehe etwa [4]), folgt i) unmittelbar aus der Def. von R^* .

Da R^* injektiv ist und offensichtlich $\dim(M^\perp) = n+4$ gilt, folgt aus i): $\dim(R(M)^\perp) = \dim(Z(R)^\perp \cap M^\perp)$. Daraus folgt mit bekannten Isomorphiesätzen unter Beachtung von $M \cap Z(R) = \{0\}$ die Behauptung ii). ■

Durch eine einfache Rechnung bestätigt man, daß folgende $n+2$ $L_1(I)$ -Funktionen eine Basis in $R(M)^\perp$ bilden:

$$b_0(t) := \begin{cases} h_0^{-1}(t_1 - t) & , t \in [a, t_1] \\ 0 & , t \notin [a, t_1] \end{cases} ; \quad b_{n+1}(t) := \begin{cases} 0 & , t \notin [t_n, b] \\ h_n^{-1}(t - t_n) & , t \in [t_n, b] \end{cases} ;$$

für $i=1, \dots, n$:

$$b_i(t) := \begin{cases} 0 & , t \in [a, t_{i-1}] \\ h_{i-1}^{-1}(t - t_{i-1}) & , t \in [t_{i-1}, t_i] \\ h_i^{-1}(t_{i+1} - t) & , t \in [t_i, t_{i+1}] \\ 0 & , t \in [t_{i+1}, b] \end{cases}$$

Nun kann man den Charakterisierungssatz (1.4) folgendermaßen formulieren:

(1.6) Es ist äquivalent für $f_0 \in H_{\infty,2}(I)$:

a) $\int_I f_0''(t)^2 dt = \min \left\{ \int_I f''(t)^2 dt \mid f \in V(Y) \right\}.$

b) i) $f_0 \in V(Y) \cap C^2(I).$

ii) $f_0'' \in R(M)^\perp.$

Von (1.6) ausgehend werden im folgenden Funktionenklassen dadurch definiert, daß man b)ii) durch eine Forderung der Form:

$$G(f'') \in R(M)^{\perp}$$

mit einer gewissen Funktion G ersetzt. Einen Hinweis darauf geben folgende Beispiele (siehe (1.1)):

(1.7) Beispiele:

1. Sei $f_0 \in C^2(I)$ mit: i) $f_0|_{[t_i, t_{i+1}]} \in R_{2,1}$, $i=0, \dots, n$
 ii) $f''_0(t) > 0$ für alle $t \in I$.

Dann gilt:

$$(f''_0)^{\vec{3}} \in R(M)^{\perp}.$$

2. Sei $f_0 \in C^2(I)$ mit: i) $f_0(t) = a \cdot \exp(bt) + ct + d$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$
 $i=0, \dots, n$
 ii) $f''_0(t) > 0$ für alle $t \in I$.

Dann gilt:

$$\log(f''_0) \in R(M)^{\perp}.$$

§2 Die Interpolationsaufgabe für A - Splines

In diesem Abschnitt wird die Interpolationsaufgabe für die Klasse der A - Splines formuliert; dazu werden zunächst in 2.1 die S-Funktionen eingeführt, die diese Klasse beschreiben. In 2.2 wird die Eindeutigkeit eines interpolierenden A - Spline gezeigt, in 2.3 werden notwendige und hinreichende Kriterien für die Existenz eines interpolierenden A - Spline angegeben.

2.1 S-Funktionen

(2.1) Bezeichnungen:

1. $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$; $\mathbb{R}_{\infty} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$; $\mathbb{R}_{-\infty} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$;
 $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$; $\overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
2. Ist N eine numerische Funktion auf einer Menge X , d. h.
 $N : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, so wird mit $\text{dom}(N)$ der effektive Definitionsbereich bezeichnet, also:
 $\text{dom}(N) = \{x \in X \mid N(x) \in \mathbb{R}\}$.
3. Sei T Teilmenge einer Menge X . Die Abbildung

$$\delta_T : X \ni x \mapsto \begin{cases} \infty & , x \notin T \\ 0 & , x \in T \end{cases}$$
 heißt die charakteristische Funktion von T (in X).
4. Sei X topologischer Raum und $U \subset X$.
 Mit $\text{int}(U)$ wird stets der offene Kern von U bezeichnet.

(2.2) Definition:

Eine Funktion $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\infty}$ heißt S-Funktion, wenn gilt:

- i) A ist konvex und unterhalbstetig¹⁾

1) d. h. für jedes $r \in \mathbb{R}$ ist $\{u \in \mathbb{R} \mid A(u) \leq r\}$ abgeschlossen,

ii) $\text{int}(\text{dom}(A)) \neq \emptyset$; $A \in C^2(\text{int}(\text{dom}(A)))$

iii) A' ist strikt monoton wachsend in $\text{int}(\text{dom}(A))$.

(2.3) Beispiele für S-Funktionen sind:

1. $A(u) := p^{-1} |u|^p$, $p \in (1, \infty)$.

2. $A(u) := \begin{cases} \infty & , u < 0 \\ -p^{-1} u^p & , u \geq 0 \end{cases}$, $p \in (-\infty, 1)$, $p \neq 0$ ($\frac{1}{0} := \infty$).

3. $A(u) := (1 + |u|) \log(1 + |u|) - |u|$.

4. $A(u) := \exp(|u|) - |u| - 1$.

5. $A(u) := \begin{cases} \infty & , |u| > 1 \\ |u| & \\ \int_0^{|u|} \arcsin(t) dt & , |u| \leq 1 \end{cases}$

6. $A(u) := \exp(u^2)$.

(2.4) Bezeichnungen:

Sei A S-Fkt.

a) $D(A) := \text{int}(\text{dom}(A))$;

b) $D^*(A) := A'(D(A))$.

In der folgenden Definition werden gewisse Teilklassen der S-Fkt. eingeführt, die in § 3 näher behandelt werden.

(2.5) Definition:

Sei A S-Fkt.

a) A heißt S(0)-Fkt., wenn gilt: i) $D(A) = \mathbb{R}$,

ii) $D^*(A) = \mathbb{R}$.

b) A heißt S(1)-Fkt., wenn gilt: i) $D(A) = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$,

ii) $D^*(A) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+$.

c) A heißt S(2)-Fkt., wenn gilt: i) $D(A) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+$,

ii) $D^*(A) = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$.

(2.6) Folgerungen:

Sei A S-Fkt. Dann gilt:

1. A ist strikt monoton in $\text{dom}(A)$;
2. Auf $D^*(A)$ ist A'^{-1} definiert und es gilt:
 - i) $A'^{-1}(D^*(A)) = D(A)$,
 - ii) A'^{-1} ist strikt monoton wachsend,
 - iii) $A'^{-1} \in C^1(D^*(A))$.

Beweis: Folgt unmittelbar aus Def.(2.2). ■

(2.7) Bemerkungen:

1. Eine Teilmenge der S-Fkt. spielt bei der Definition der Orlicz - Räume, die in §6 gegeben wird, eine Rolle.
2. Die Forderung $A \in C^2(D(A))$ ist hinreichend dafür, daß für die im folgenden definierten A - Splines f_0 gilt:

$$f_0|_{[t_i, t_{i+1}]} \in C^3([t_i, t_{i+1}]) \text{ , } i=0, \dots, n.$$

2.2 Definition der A - Splines; Eindeutigkeit

(2.8) Bezeichnungen:

Sei A S-Fkt.

- a) $D_t(A) := \{f \in C(I) | f(s) \in D(A) \text{ für alle } s \in I\}$
- b) $D_t^*(A) := \{f \in C(I) | f(s) \in D^*(A) \text{ für alle } s \in I\}$

(2.9) Folgerungen:

1. A S(0)-Fkt. $\Rightarrow D_t(A) = D_t^*(A) = C(I)$;
2. A S(1)-Fkt., $f_0 \in C^2(I)$.

$$\Rightarrow (f_0'' \in D_t(A) \Rightarrow f_0 \text{ strikt konvex})$$

$$(f_0'' \in D_t^*(A) \Rightarrow f_0 \text{ strikt konkav}).$$

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nun zur Definition der A - Splines:

(2.10) Definition:

Sei A S -Funktion.

a) $f_0 \in C^2(I)$ heißt A -Spline, wenn gilt:

i) $f_0'' \in D_t(A)$,

ii) $A' \circ f_0'' \in R(M)^\perp$.

b) $S_M^A := \{f \in C^2(I) \mid f \text{ A-Spline}\}.$

(2.11) Folgerungen:

1. A S -Fkt. $\Rightarrow P_2 \cap S_M^A \neq \emptyset$;

2. A $S(0)$ -Fkt. $\Rightarrow P_2 \subset S_M^A$;

3. A $S(1)$ -Fkt. $\Rightarrow P_2 \cap S_M^A = \{p \in P_2 \mid p''(t) > 0 \text{ für alle } t \in I\}$;

Beweis: Zu 1: Folgt aus $D(A) \neq \emptyset$. 2, 3 folgen aus (2.5) und (2.9). ■

An fünf Beispielen, die schon unter (2.3) aufgeführt wurden, soll die Definition (2.10) untersucht werden. Diese Splinetypen werden auch numerisch untersucht (§5).

(2.12) Beispiele:

1. "Rationale Splines":

$$A(u) := \begin{cases} \infty & , u < 0 \\ -\frac{3}{2}u^{2/3} & , u \geq 0 \end{cases} \quad (S(1)\text{-Fkt.})$$

$$f_0 \in S_M^A \Leftrightarrow \text{i) } f_0 \in C^2(I)$$

$$\text{ii) } f_0''(t) > 0 \text{ für alle } t \in I$$

$$\text{iii) } f_0|_{[t_i, t_{i+1}]} \in R_{2,1}, i=0, \dots, n.$$

2. "Logarithmische Splines":

$$A(u) := \begin{cases} \infty & , u < 0 \\ -2u^{\frac{1}{2}} & , u \geq 0 \end{cases} \quad (S(1)\text{-Fkt.})$$

$$f_0 \in S_M^A \Leftrightarrow \begin{aligned} &\text{i) } f_0 \in C^2(I) \\ &\text{ii) } f_0''(t) > 0 \text{ f. a. } t \in I \\ &\text{iii) } f_0|_{[t_i, t_{i+1}]} \in P_2 \cup Lg, i=0, \dots, n, \\ &\text{wobei: } Lg := P_1 + \{g \mid g(t) = a \cdot \log(t+b)\}. \end{aligned}$$

3. "Kubische Splines":

$$\begin{aligned} A(u) &:= \frac{1}{2} |u|^2 && (S(O)\text{-Fkt.}) \\ f_0 \in S_M^A \Leftrightarrow &\begin{aligned} &\text{i) } f_0 \in C^2(I) \\ &\text{ii) } f_0|_{[t_i, t_{i+1}]} \in P_3, i=0, \dots, n. \end{aligned} \end{aligned}$$

4. "Exponentialsplines":

$$\begin{aligned} A(u) &:= (1+|u|)\log(1+|u|) - |u| && (S(O)\text{-Fkt.}) \\ f_0 \in S_M^A \Leftrightarrow &\begin{aligned} &\text{i) } f_0 \in C^2(I) \\ &\text{ii) } f_0''(t) = (\exp(|p_i(t)|) - 1) \text{sign}(p_i(t)) \\ &\text{für } t \in [t_i, t_{i+1}] \text{ mit } p_i \in P_1, i=0, \dots, n. \end{aligned} \end{aligned}$$

5. "Rho5 - Splines":

$$\begin{aligned} A(u) &:= \frac{3}{4} |u|^{4/3} && (S(O)\text{-Fkt.}) \\ f_0 \in S_M^A \Leftrightarrow &\begin{aligned} &\text{i) } f_0 \in C^2(I) \\ &\text{ii) } f_0|_{[t_i, t_{i+1}]} \in P_2 \cup Rh_5 \\ &\text{wobei: } Rh_5 := P_1 + \{f \mid f(t) = a \cdot (t+b)^5\}. \end{aligned} \end{aligned}$$

(2.13) Bemerkungen:

- a) An obigen Beispielen sieht man, wie sich Splinefunktionen von der Art, wie sie R. Schaback [18] betrachtet, hier einordnen.
- b) Für die $S(O)$ -Fkt. $A(u) := \frac{1}{2} |u|^2$ ist S_M^A ein linearer Teilraum von $C^2(I)$, für jede andere S -Fkt. ist S_M^A weder linear noch konvex.

(2.14) Definition:

Sei A S-Fkt. und $y \in \mathbb{R}^{n+4}$ IPV.

a) $f_0 \in C^2(I)$ heißt (y-)interpolierender A - Spline,
wenn gilt:

$$f_0 \in S_M^A \cap V(y).$$

b) $S_M^A(y) := \{f \in C^2(I) \mid f \text{ (y-)interpolierender A - Spline}\}.$

Unmittelbar aus den Definitionen (2.10) und (2.14) folgt:

$$S_M^A = \bigcup_{y \in \mathbb{R}^{n+4}} S_M^A(y).$$

Im folgenden Satz kann nun gezeigt werden, daß **höchstens ein** interpolierender A - Spline existiert.

(2.15) Satz:

Sei A S-Fkt. und $y \in \mathbb{R}^{n+4}$ IPV.

Dann existiert höchstens ein (y-)interpolierender A - Spline.

Beweis: Sei $S_M^A(y) \neq \emptyset$ und seien $f_1, f_2 \in S_M^A(y)$. Da $f_1(t_i) - f_2(t_i) = 0$ für $i=0, \dots, n+1$ gilt, genügt es zu zeigen:

$$g(t) := f_1''(t) - f_2''(t) = 0 \text{ für alle } t \in I.$$

Aus der Definition der interpol. A - Splines (beachte: A'^{-1} strikt monoton wachsend) folgt:

(+) $\left\{ \begin{array}{l} \text{In jedem Intervall } [t_i, t_{i+1}] \text{ hat } g \text{ höchstens eine Null-} \\ \text{stelle oder verschwindet identisch.} \end{array} \right.$

Nach dem Satz von Rolle muß g auf Grund der Interpolationsbedingungen mindestens $n+2$ Nullstellen besitzen; wegen (+) gilt in einem Teilintervall $[t_j, t_{j+1}]$ also:

$$g|_{[t_j, t_{j+1}]} = 0.$$

Unter der Annahme, daß g nicht identisch verschwindet, muß g wiederum nach dem Satz von Rolle mindestens $j+1$ Nullstellen in $[a, t_j]$ und $n-j+1$ Nullstellen in $[t_{j+1}, b]$ besitzen; wegen (+)

existieren Teilintervalle $[t_1, t_{1+1}]$ in $[a, t_j]$ und $[t_k, t_{k+1}]$ in $[t_{j+1}, b]$, in denen g identisch verschwindet. Auf diese Weise erhält man nach endlich vielen Schritten: $g \equiv 0$. ■

2.3 Zur Existenz interpolierender A - Splines

(2.16) Lemma:

Sei A S-Fkt. und $y \in \mathbb{R}^{n+4}$ IPV.

Unter der Voraussetzung: $S_M^A(y) \neq \emptyset$ gilt dann:

a) $D_t(A) \cap R(V(y)) \neq \emptyset$;

b) $D_t^*(A) \cap R(M)^\perp \neq \emptyset$.

Beweis: Folgt unmittelbar aus (2.10) und (2.14). ■

Mit einem Interpolationsvektor $y \in \mathbb{R}^{n+4}$ führen wir folgende Bezeichnung ein:

a) $\Delta_i(y) := h_i^{-1}(y_{i+1} - y_i) \quad , i=0, \dots, n$;

b)
$$D_i(y) := \begin{cases} \Delta_0(y) - y'_0 & , i=0 \\ \Delta_i(y) - \Delta_{i-1}(y) & , 1 \leq i \leq n \\ y'_{n+1} - \Delta_n(y) & , i=n+1 \end{cases} .$$

(2.17) Satz:

Sei A S-Fkt. und $y \in \mathbb{R}^{n+4}$ IPV. Dann ist äquivalent:

a) $S_M^A(y) \neq \emptyset$

b) Es existiert $g_0 \in D_t^*(A) \cap R(M)^\perp$ mit:

$$\int_I A'^{-1}(g_0(t)) b_i(t) dt = D_i(y) \quad , i=0, \dots, n+1.$$

Beweis: Sei $f_0 \in S_M^A(y)$; dann gilt für $g_0 := A' \circ f_0''$:

$g_0 \in D_t^*(A) \cap R(M)^\perp$ (Definition von f_0). Eine einfache Rechnung (partielle Integration) bestätigt:

$$\int_I A'^{-1}(g_0(t)) b_i(t) dt = D_i(y) \quad , i=0, \dots, n+1.$$

Damit ist a) $\Rightarrow$ b) bewiesen.

"b) $\Rightarrow$ a)"

$$k := A'^{-1} \circ g_0; \quad f_i(t) := \int_{t_i}^t k(s) ds + \int_{t_i}^{t_{i+1}} s k(s) ds + u_i(t - t_i) + v_i$$

$$\text{für } t \in [t_i, t_{i+1}], \quad i=0, \dots, n \text{ mit: } u_i := \Delta_i(y) - \int_{t_i}^{t_{i+1}} k(s) b_i(s) ds,$$

$$v_i := y_i - \int_{t_i}^{t_{i+1}} s k(s) ds.$$

Damit gilt:

$$(1) \quad f_i(t_i) = y_i, \quad f_i(t_{i+1}) = y_{i+1} \quad , i=0, \dots, n.$$

$$(2) \quad f_i'(t) = k(t) \quad \text{für } t \in [t_i, t_{i+1}] \quad , i=0, \dots, n.$$

$$(3) \quad f_0'(a) = y_0', \quad f_n'(b) = y_{n+1}', \quad \text{denn:}$$

$$f_0'(a) = u_0 = \Delta_0(y) - D_0(y) = y_0';$$

$$f_n'(b) = u_n + \int_{t_n}^b k(s) ds = \int_{t_n}^b k(s) ds + \Delta_n(y) - \int_{t_n}^b k(s) b_n(s) ds$$

$$= \int_{t_n}^b k(s) ds + \Delta_n(y) - \int_{t_n}^b k(s) h_n^{-1}(t_n - s + h_n) ds$$

$$= \Delta_n(y) + \int_{t_n}^b k(s) b_{n+1}(s) ds = \Delta_n(y) + D_{n+1}(y) = y_{n+1}'.$$

$$(4) \quad f_i'(t_{i+1}) = f_{i+1}'(t_{i+1}) \quad , i=0, \dots, n-1, \quad \text{denn:}$$

$$f_i'(t_{i+1}) = u_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} k(s) ds = \Delta_i(y) - \int_{t_i}^{t_{i+1}} k(s) b_i(s) ds + \int_{t_i}^{t_{i+1}} k(s) ds$$

$$= - \int_{t_i}^{t_{i+1}} k(s) b_{i+1}(s) ds + \Delta_i(y) =$$

$$= \Delta_i(y) - D_{i+1}(y) + \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} k(s) b_{i+1}(s) ds = u_{i+1} =$$

$$= f_{i+1}'(t_{i+1}).$$

Setzt man also: $f|_{[t_i, t_{i+1}]} := f_i$, $i=0, \dots, n$, so ist wegen
(1) - (4) f offensichtlich interpolierender A - Spline.

Für $z \in \mathbb{R}^{n+2}$, $z = (z_0, \dots, z_{n+1})$, sei $g_z \in R(M)^+$ folgendermaßen definiert:

$$g_z(t) := \sum_{i=0}^{n+1} z_i b_i(t) \quad , \quad t \in I.$$

Damit erhält man aus (2.17):

(2.18) Folgerung:

Sei A S-Fkt. und $y \in \mathbb{R}^{n+4}$ IPV.

Dann existiert ein interpolierender A - Spline genau dann, wenn ein $z \in \mathbb{R}^{n+2}$ existiert, so daß gilt:

$$(1) \quad g_z \in D_t^*(A),$$

$$(GS) \quad (2) \quad \int_t^{t+1} A^{-1}(g_z(t)) b_i(t) dt = D_i(y) \quad , i=0, \dots, n+1.$$

(2.19) Bemerkungen:

1. Um die Existenz eines interpolierenden A - Spline nachzuweisen, muß man das i. a. nichtlineare Gleichungssystem (GS) in (2.18) auf seine Lösbarkeit untersuchen. Dies wird in §4 geschehen.
2. Bei der Berechnung eines interpolierenden A - Spline kommt es im wesentlichen darauf an, ein $z \in \mathbb{R}^{n+2}$ zu finden, so daß g_z das Gleichungssystem (GS) in (2.18) löst; im Beweis von (2.17) ist angegeben, wie man dann den Spline daraus berechnen kann.

§3 Konvexe Funktionen

Bevor das Problem der A - Splines weiter verfolgt wird, werden in diesem Abschnitt zunächst einige (bekannte) Hilfsmittel aus der Theorie der konvexen Funktionen bereitgestellt.

3.1 Konjugierte Funktionen

Ist X lokalkonvexer Raum (abgekürzt: X lk. R.), so wird mit X^* stets der topologische Dualraum von X bezeichnet; mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ schreiben wir dann folgende Bilinearform:

$$X^* \times X \ni (x^*, x) \mapsto x^*(x) \in \mathbb{R};$$

die schwachen Topologien auf X bzw. X^* , die von X^* in X bzw. von X in X^* induziert werden, werden mit $\sigma(X, X^*)$ bzw. $\sigma(X^*, X)$ bezeichnet.

(3.1) Definition:

Sei X lk. R. und $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ Abbildung.

- a) Die Abbildung $F^* : X^* \ni y \mapsto \sup\{\langle y, x \rangle - F(x) \mid x \in X\} \in \overline{\mathbb{R}}$ heißt die konvex - konjugierte Funktion von F .
- b) Die Abbildung $F^+ : X^* \ni y \mapsto \inf\{\langle y, x \rangle - F(x) \mid x \in X\} \in \overline{\mathbb{R}}$ heißt die konkav - konjugierte Funktion von F .

Unmittelbar aus der Definition folgen einfache Eigenschaften der konjugierten Funktionen.

(3.2) Folgerungen:

Sei X lk. R. und seien $F: X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$, $G: X \rightarrow \mathbb{R}_{-\infty}$ Abbildungen.

Dann gilt:

- (1) $F^* \neq \infty$, $G^+ \neq -\infty$.
- (2) F^* , $-G^+$ sind konvexe Funktionen.
- (3) F^* , $-G^+$ sind $\sigma(X^*, X)$ - unterhalbstetig.
- (4) Für alle $(y, x) \in X^* \times X$ gilt:

$$\langle y, x \rangle \leq F(x) + F^*(y)$$

"Youngsche Ungleichungen"

$$\langle y, x \rangle \geq G(x) + G^+(y)$$

(3.3) Beispiel:

Sei X l.k. R. und $K \subset X$.

Dann gilt: i) $\delta_K^*(y) = \sup\{\langle y, k \rangle \mid k \in K\}$.

ii) $\delta_K^+(y) = \inf\{\langle y, x \rangle \mid x \in K\}$.

iii) Hat K die Gestalt $x_0 + W$, W lin. Teilraum,

so gilt:
$$\delta_K^*(y) = \begin{cases} \langle y, x_0 \rangle & , \text{falls } y \in W^\perp \\ \infty & , \text{sonst} \end{cases}.$$

Von F^* , F^+ ausgehend lassen sich die doppelt konjugierten F^{**} , F^{++} in X definieren. Unmittelbar aus den Youngschen Ungleichungen folgt:

$$F^{**} \leq F, F^{++} \geq F.$$

(3.4) Definition:

Sei X l.k. R.

$\Gamma(X) := \{F: X \rightarrow \mathbb{R}_\infty \mid F \neq \infty, \text{konvex, } \sigma(X, X^*)\text{-unterhalbstetig}\}$.

Aus (3.2) folgt, daß für $F^{**} = F$ notwendig ist: $F \in \Gamma(X)$. Das folgende Lemma zeigt, daß $F \in \Gamma(X)$ auch hinreichend für $F^{**} = F$ ist.

(3.5) Lemma:

Sei X l.k. R. und $F: X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$ Abbildung, $F \neq \infty$.

Dann ist äquivalent:

a) $F \in \Gamma(X)$

b) $F^{**} = F$.

Beweis: [8a], S.46.

(3.6) Bemerkungen:

(1) Ein (3.5) analoges Lemma kann natürlich auch für die

konkav - konjugierten Funktionen formuliert werden.

- (2) Bei fast allen Sätzen, die im Zusammenhang mit konjugierten Funktionen angegeben werden, spielen bei den Beweisen Trennungssätze eine wesentliche Rolle.

3.2 Subdifferenzierbarkeit konvexer Funktionen

(3.7) Definition:

Sei X l.k. R., $F: X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$ konvex und $x_0 \in X$.

- a) F heißt subdifferenzierbar in x_0 , wenn ein $y_0 \in X^*$ existiert mit:

$$\langle y_0, x - x_0 \rangle \leq F(x) - F(x_0) \text{ für alle } x \in X;$$

y_0 heißt dann ein Subgradient von F in x_0 .

- b) Die Menge

$$\partial F(x_0) := \{y_0 \in X^* \mid y_0 \text{ Subgradient von } F \text{ in } x_0\}$$

heißt das Subdifferential von F in x_0 .

Ist eine konvexe Funktion $F: X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$ (X l.k. R.) Gateauxdifferenzierbar in x_0 (d. h. $\nabla F(x_0, x) := \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1}(F(x_0 + tx) - F(x_0))$)

existiert für alle $x \in X$ und gilt: $\nabla F(x_0, \cdot) \in X^*$, so folgt:

$$\partial F(x_0) = \{\nabla F(x_0, \cdot)\} \quad ([8a], \text{ S.28}).$$

(3.8) Beispiele:

$$(1) \quad F: \mathbb{R} \ni x \mapsto |x| \in \mathbb{R};$$

$$= \partial F(0) = \{u \in \mathbb{R} \mid |u| \leq 1\}.$$

$$(2) \quad F: \mathbb{R} \ni x \mapsto \begin{cases} -\log(1+x) & , x \geq 0 \\ \infty & , x < 0 \end{cases}$$

$$= \partial F(0) = \{u \in \mathbb{R} \mid |u| \leq 1\}.$$

(3.9) Bemerkungen:

- (1) Notwendig dafür, daß eine konvexe Funktion F subdifferenzierbar in einem Punkt x_0 ist, ist offensichtlich: $x_0 \in \text{dom}(F)$, hinreichend ist: F stetig in x_0 ([8a], S.22).
- (2) Ist G eine konkave Funktion, so setzt man:

$$\partial G(x_0) := -\partial(-G)(x_0),$$

$$\text{d. h. : } y \in \partial G(x_0) \Leftrightarrow \langle y, x - x_0 \rangle \geq G(x) - G(x_0) \text{ f. a. } x \in X.$$

(3.10) Lemma:

Sei X l.k. R. und $F \in \Gamma(X)$.

Dann ist für $(y_0, x_0) \in X^* \times X$ äquivalent:

- a) $y_0 \in \partial F(x_0)$,
- b) $\langle y_0, x_0 \rangle = F(x_0) + F^*(y_0)$,
- c) $x_0 \in \partial F^*(y_0)$.

Beweis: Folgt unmittelbar aus den Definitionen unter Berücksichtigung von: $F^{**} = F$ (Lemma (3.5)).

Mit diesem Lemma lassen sich Aussagen über die Konjugierten der S-Funktionen machen, denn es gilt nach Definition:

$$A \text{ S-Fkt.} \Rightarrow A \in \Gamma(\mathbb{R}).$$

(3.11) Lemma:

Sei A S-Fkt. Dann gilt:

- a) $A^*(v) = vA'^{-1}(v) - A(A'^{-1}(v))$, $v \in D^*(A)$;
- b) $A^{*'}(v) = A'^{-1}(v)$, $v \in D^*(A)$;
- c) $A^* \in C^2(D^*(A))$.

Beweis:

$$a) v \in D^*(A) \Rightarrow v = A'(u) \text{ mit } u \in D(A) \Rightarrow v \in \partial A(u) \Rightarrow uv = A(u) + A^*(v) \quad ((3.10))$$

$$b) A \in C^2(D(A)) \Rightarrow A'^{-1} \in C^1(D^*(A)); \text{ damit folgt aus a):}$$

$$A^{*'}(v) = A'^{-1}(v) + v(A'^{-1})'(v) - A'(A'^{-1}(v))(A'^{-1})'(v) = A'^{-1}(v).$$

$$c) \text{ Folgt aus a) und b).}$$

(3.12) Folgerungen:

$$(1) \quad A \text{ S}(0)\text{-Fkt.} \Rightarrow A^* \text{ S}(0)\text{-Fkt.}$$

$$(2) \quad A \text{ S}(1)\text{-Fkt.} \Rightarrow A^* \text{ S}(2)\text{-Fkt.}$$

$$(3) \quad A \text{ S}(2)\text{-Fkt.} \Rightarrow A^* \text{ S}(1)\text{-Fkt.}$$

Beweis: Unmittelbar aus (3.2) und (3.11) folgt, daß in jedem Fall gilt: A^* ist S-Fkt.

(1) Folgt aus (3.11).

(2) Zu zeigen bleibt: $D^*(A^*) = \mathbb{R}_+$, $D(A^*) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+$.

i) $v \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+ \Rightarrow v \in \text{dom}(A^*)$ nach (3.11).

ii) $v > 0$; $A^*(v) = \sup\{uv - A(u) \mid u > 0\}$; da die Funktion

$N: \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \ni u \mapsto uv - A(u) \in \mathbb{R}$ monoton wachsend ist

(beachte: $N'(u) = v - A'(u) > 0$), gilt: $A^*(v) = \infty$.

Aus i) und ii) folgt nun: $D(A^*) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+$; mit (3.11) erhält

man daraus auch: $D^*(A^*) = \mathbb{R}_+$.

(3) Analog (2). ■

Seien $\Sigma(0)$, $\Sigma(1)$, $\Sigma(2)$ die Klassen der S(0)-, S(1)-, S(2)-Fkt. und $\Sigma^*(0)$, $\Sigma^*(1)$, $\Sigma^*(2)$ die konjugierten Klassen, d. h.

$$\Sigma^*(i) = \{G \mid G = A^* \text{ mit } A \in \Sigma(i)\}, i=0,1,2;$$

dann lautet die Aussage von (3.12): i) $\Sigma^*(0) = \Sigma(0)$

$$\text{ii) } \Sigma^*(1) = \Sigma(2)$$

$$\text{iii) } \Sigma^*(2) = \Sigma(1).$$

(3.13) Beispiele:

$$(1) \quad A(u) := p^{-1} |u|^p, \quad p \in (1, \infty)$$

$$\Rightarrow A^*(v) = q^{-1} |v|^q \text{ mit } p^{-1} + q^{-1} = 1.$$

$$(2) \quad A(u) := \begin{cases} \infty, & u < 0 \\ -p^{-1} u^p, & u \geq 0 \end{cases}, \quad p \in (-\infty, 1), \quad p \neq 0.$$

$$\Rightarrow A^*(v) = \begin{cases} \infty, & v > 0 \\ p^{-1} (1-p) |v|^{p(p-1)^{-1}}, & v \leq 0 \end{cases}$$

$$(3) \quad A(u) := (1+|u|)\log(1+|u|) - |u|$$

$$\Rightarrow A^*(v) = \exp(|v|) - |v| - 1.$$

$$(4) \quad A(u) := \exp(|u|) - |u| - 1$$

$$\Rightarrow A^*(v) = (1+|v|)\log(1+|v|) - |v|.$$

$$(5) \quad A(u) := \begin{cases} \infty & , |u| > \frac{\pi}{2} \\ |u| & \\ \int_0^{|u|} \arcsin(t) dt & , |u| \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A^*(v) = \begin{cases} \infty & , |v| > \frac{\pi}{2} \\ 1 - \cos(|v|) & , \text{sonst} \end{cases}.$$

$$(6) \quad A(u) := \exp(u^2) - 1.$$

Für diese $S(0)$ -Fkt. ist die konjugierte Funktion A^* nicht geschlossen angebar, da die Umkehrfunktion von A' nicht explizit berechnet werden kann.

Eine bedeutende Rolle spielt der Begriff der Subdifferenzierbarkeit bei der Charakterisierung von Minimallösungen konvexer Funktionen. Ist nämlich $F: X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$, X l.k. R., eine konvexe Funktion, so ist für ein $x_0 \in X$ offensichtlich äquivalent:

$$a) \quad F(x_0) = \min\{F(x) \mid x \in X\}$$

$$b) \quad 0 \in \partial F(x_0).$$

Sucht man ein Minimum nicht im ganzen Raum X sondern nur auf einer konvexen Teilmenge K , so erhält man folgende Äquivalenz für $k_0 \in K$:

$$a) \quad F(k_0) = \min\{F(k) \mid k \in K\}$$

$$b) \quad 0 \in \partial(F|_K)(k_0)$$

Daraus läßt sich sofort eine hinreichende Bedingung für $F(k_0) = \min\{F(k) \mid k \in K\}$ gewinnen.

(3.14) Lemma:

Sei X l.k. R., $F, -G : X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$ konvex.

Gilt für $x_0 \in X$: $\partial F(x_0) \cap \partial G(x_0) \neq \emptyset$, so folgt:

$$F(x_0) - G(x_0) = \min\{F(x) - G(x) \mid x \in X\}.$$

Beweis: $\partial F(x_0) \cap \partial G(x_0) \neq \emptyset \Rightarrow \theta \in \partial F(x_0) + \partial(-G)(x_0)$

$\Rightarrow \theta \in \partial(F-G)(x_0) \Rightarrow 0 \leq F(x) - G(x) - (F(x_0) - G(x_0))$ für alle $x \in X$.

Das Lemma (3.14) ist auf das Problem der konvexen Nebenbedingungen anwendbar (wähle $G := -\delta_K$). Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, daß unter gewissen Voraussetzungen die Bedingung $\partial F(x_0) \cap \partial G(x_0) \neq \emptyset$ auch notwendig für eine Minimallösung x_0 ist.

3.3 Dualität

Sei X l.k. R. und $F, -G : X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$ konvex; unmittelbar aus der Definition der konjugierten Funktionen folgt:

$$(*) \quad \inf\{F(x) - G(x) \mid x \in X\} \geq \sup\{G^+(y) - F^*(y) \mid y \in X^*\}.$$

Folgendes Lemma (Beweis: siehe [8a], S.68) gibt eine Bedingung an, unter der obige Ungleichung (*) wesentlich verschärft werden kann.

(3.15) Lemma:

Sei X l.k. R., $F, -G : X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$ konvex.

Es gelte: i) $\text{dom}(F) \cap \text{dom}(G) \neq \emptyset$;

ii) F oder G ist stetig in einem $x \in \text{dom}(F) \cap \text{dom}(G)$.

Dann gilt:

$$\inf\{F(x) - G(x) \mid x \in X\} = \max\{G^+(y) - F^*(y) \mid y \in X^*\}.$$

(3.16) Lemma:

Sei X l.k. R., $F, -G : X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$ konvex.

Es gelte: $\inf\{F(x) - G(x) \mid x \in X\} = \max\{G^+(y) - F^*(y) \mid y \in X^*\}$.

Dann gilt:

(1) Es ist äquivalent für $x_0 \in X$:

$$a) F(x_0) - G(x_0) = \min\{F(x) - G(x) \mid x \in X\};$$

$$b) \partial F(x_0) \cap \partial G(x_0) \neq \emptyset;$$

(2) Ist für ein $x_0 \in X$ a) in (1) erfüllt, so folgt:

$$\partial F(x_0) \cap \partial G(x_0) = \{y_0 \in X^* \mid F(x_0) - G(x_0) = G^+(y_0) - F^*(y_0)\}.$$

Beweis: ([8a], S.69)

(1) Sei $\bar{y} \in X^*$ mit: $\inf\{F(x) - G(x) \mid x \in X\} = G^+(\bar{y}) - F^*(\bar{y})$; (†)

"a) $\Rightarrow$ b)" $F(x_0) - G(x_0) = G^+(\bar{y}) - F^*(\bar{y})$; mit Hilfe der Youngschen Ungleichungen ((3.2)) folgt: $F(x_0) - G(x_0) = \langle \bar{y}, x_0 \rangle$; daraus erhält man unmittelbar: $\bar{y} \in \partial F(x_0)$; analog folgt: $\bar{y} \in \partial G(x_0)$.

"b) $\Rightarrow$ a)" Sei $y_1 \in \partial F(x_0) \cap \partial G(x_0)$; dann folgt:

$$F(x_0) + F^*(y_1) \leq \langle y_1, x_0 \rangle \leq G(x_0) + G^+(y_1); \text{ aus (3.2) folgt:}$$

$$F(x_0) - G(x_0) = G^+(y_1) - F^*(y_1) \leq G^+(\bar{y}) - F^*(\bar{y}); \text{ mit (†) folgt a).}$$

(2) Folgt aus dem Beweis von (1). ■

(3.17) Bemerkungen:

1. Lemma (3.15) gibt eine hinreichende Bedingung für die wesentliche Voraussetzung in (3.16) an.
2. Die Bedeutung des Lemmas (3.16) liegt nicht nur darin, daß damit Minimallösungen von $F-G$ charakterisiert werden. Es gestattet in vielen Fällen auch einen Weg zur Berechnung dieser Minimallösungen anzugeben; bei der Berechnung der interpolierenden A - Splines wird sich dies zeigen.

3.4 Konvexe Integrale

In diesem Abschnitt werden die Konjugierten (konvex) und die Subdifferentiale von Integralfunktionalen auf linearen Räumen meßbarer Funktionen berechnet. Probleme dieser Art wurden von R. T. Rockafellar [16b, 16c, 16d] untersucht. Definitionen und Sätze werden hier jedoch nur in der Allgemeinheit angegeben, in der sie im weiteren Verlauf benötigt werden.

(3.18) Definition:

Sei $T \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-meßbar und seien L, L^* reelle Vektorräume (Lebesgue-)meßbarer Funktionen.

(L, L^*) heißt ein zerlegbares Paar, wenn gilt:

- i) $(f, g) \in L^* \times L \Rightarrow f \cdot g \in L_1(T)$;
- ii) $f \in L_\infty(T), \mu(\{f \neq 0\}) < \infty \Rightarrow f \in L \cap L^*$; ¹⁾
- iii) $(f, g) \in L^* \times L, E \subset T \text{ mit } \mu(E) < \infty \Rightarrow (f_E, g_E) \in L^* \times L$. ²⁾

(3.19) Beispiel:

$(L_p(T), L_q(T))$ ($1 \leq p \leq \infty, p^{-1} + q^{-1} = 1$) ist zerlegbares Paar.

Ist $B \in \Gamma(\mathbb{R})$, so gilt offensichtlich:

f meßbar auf $T \Rightarrow B \circ f$ meßbar auf T .

Von R. T. Rockafellar, dessen Ergebnisse hier verwendet werden sollen, wird der Begriff des "normal konvexen Integranden" verwendet. In [16b] (Lemma 1 und 5) wird gezeigt, daß für $B \in \Gamma(\mathbb{R})$ gilt:

B, B^* sind normal konvexe Integranden.

1) Mit μ bezeichnen wir das Lebesguesche Maß auf T ; alle Meßbarkeitsbegriffe beziehen sich auf dieses Maß.

2) $f_E(t) := \begin{cases} f(t) & , t \in E \\ 0 & , t \notin E \end{cases}$; analog g_E .

(3.20) Bezeichnungen:

Sei (L, L^*) ein zerlegbares Paar auf T ; $B \in \Gamma(\mathbb{R})$.

$$1. \rho_B : L \ni f \mapsto \int_T B(f(t))dt \in \mathbb{R}$$

$$2. \rho_B^* : L^* \ni g \mapsto \int_T B^*(g(t))dt \in \mathbb{R}$$

$$3. \rho_B^* : L^* \ni g \mapsto \sup \left\{ \int_T g(t)f(t)dt - \int_T B(f(t))dt \mid f \in L \right\} \in \mathbb{R}$$

(3.21) Folgerungen:

a) ρ_B ist konvex auf L ; ρ_B^* ist konvex auf L^* .

b) ρ_B^* ist die Konjugierte von ρ_B , wenn man den Raum L mit der Topologie $\sigma(L, L^*)$ versieht, die durch die Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle : L^* \times L \ni (f, g) \mapsto \int_T g(t)f(t)dt \in \mathbb{R}$ (beachte (3.18)) induziert wird.

(3.22) Lemma:

Sei (L, L^*) zerlegbares Paar und $B \in \Gamma(\mathbb{R})$.

Es gelte: $\text{dom}(\rho_B) \neq \emptyset$, $\text{dom}(\rho_B^*) \neq \emptyset$. Dann gilt:

$$(1) \rho_B^* \equiv \rho_{B^*}, \quad \rho_B \equiv \rho_{B^{**}};$$

(2) Für $(f, g) \in L \times L^*$ ist äquivalent:

$$a) g \in \partial \rho_B(f);$$

$$b) g(t) \in \partial B(f(t)) \text{ fast überall.}$$

Beweis:

Zu (1): [16b], Th. 2; zu (2): [16d]

(3.23) Folgerung:

Unter den Voraussetzungen von Lemma (3.22) gilt:

ρ_B ist $\sigma(L, L^*)$ -unterhalbstetig.

Beweis: Aus (3.22) folgt mit (3.5): $\rho_B \in \Gamma(L)$.

In vielen Fällen hat man ein konvexes Funktional ρ_B auf $L_\infty(T)$ (wie dies auch bei dem Problem der A - Splines zutreffen wird) gegeben. Um Aussagen über das duale Problem zu gewinnen (siehe

(3.15)), muß man ρ_B^* berechnen. Dabei bieten sich zwei Möglichkeiten an:

- a) Man betrachte ρ_B in $(L_\infty(T), \sigma(L_\infty(T), L_1(T)))$.
- b) Man betrachte ρ_B in $(L_\infty(T), \|\cdot\|_\infty)$.

Im Fall a) hat man den Vorteil, (3.22) zur Berechnung von ρ_B^* anwenden zu können. Um aber eine Aussage über das duale Problem mit (3.15) machen zu können, muß man Stetigkeit in der $\sigma(L_\infty, L_1)$ -Topologie nachprüfen.

Im Fall b) hat man den Vorteil, die Voraussetzung von (3.15) (Stetigkeit von ρ_B bzgl. $\|\cdot\|_\infty$) i. a. leichter nachprüfen zu können, jedoch den Nachteil, daß $L_\infty(T)^*$ kein Funktionenraum ist und daher (3.22) nicht anwendbar ist; daher stellt sich die Frage nach der Darstellung von ρ_B^* auf $L_\infty(T)^*$.

(3.24) Lemma:

Sei $B \in \Gamma(\mathbb{R})$ und ρ_B^* die Konjugierte von ρ_B auf $L_\infty(T)^*$.

Es gelte für $f_0 \in L_\infty(T)$:

$$(\dagger) \quad \bigvee_{r>0} \bigwedge_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ |x| < r}} (B(f_0(\cdot) + x) \in L_1(T)).$$

Dann gilt:

- (1) $\rho_B^*|_{L_1(T)} \equiv \rho_{B^*}$;
- (2) ρ_B ist stetig in f_0 (bzgl. $\|\cdot\|_\infty$);
- (3) Für $\lambda \in L_\infty(T)^*$ ist äquivalent:

- a) $\lambda \in \partial \rho_B(f_0)$;
- b) Es existiert $g \in L_1(T)$ mit:
 - i) $\langle \lambda, f \rangle = \int f(t)g(t)dt$ für alle $f \in L_\infty(T)$,
 - ii) $g(t) \in \partial B(f_0(t))$ fast überall.

Beweis: [16c], Th. 1, Th. 2 und Cor. 2C. ■

§4 Extremaleigenschaft interpolierender A - Splines

Nach der Bereitstellung einiger Hilfsmittel können wir nun den Zusammenhang der Interpolationsaufgabe für A - Splines mit einem Variationsproblem (Satz (4.3)) angeben. Daraus leiten wir in 4.2 das duale Variationsproblem ab und formulieren in 4.3 hinreichende Bedingungen für die Existenz interpolierender A - Splines.

4.1 Das Variationsproblem für A - Splines

Für eine S-Fkt. A wird mit ρ_A folgendes konvexe Funktional auf $L_\infty(T)$ bezeichnet (siehe (3.20):

$$\rho_A: L_\infty(T) \ni f \mapsto \int A(f(t))dt \in \mathbb{R}_\infty.$$

(4.1) Lemma:

Sei A S-Fkt. und $y \in \mathbb{R}^{n+4}$ IPV.

Es gelte: $D_t(A) \cap R(V(y)) \neq \emptyset$.

Dann ist äquivalent für $f_0 \in H_{\infty,2}(I)$:

$$a) \int_1 A(f_0''(t))dt = \min \left\{ \int_1 A(f''(t))dt \mid f \in V(y) \right\};$$

$$b) R(M)^\perp \cap \partial \rho_A(f_0'') \neq \emptyset.$$

Beweis:

Sei $g_0 \in D_t(A) \cap R(V(y)) \subset \text{dom}(\rho_A) \cap R(V(y))$; nach (3.24) ((†) in (3.24) ist für $g_0 \in D_t(A)$ erf.) ist ρ_A in g_0 stetig; mit (3.15) und (3.16) (setze dort: $X := L_\infty(I)$, $F := \rho_A$, $G := -\delta_{R(V(y))}$) folgt die Behauptung, da $\partial \delta_{R(V(y))}(f_0'') = R(M)^\perp$ gilt. ■

(4.2) Lemma:

Sei A S-Fkt. und sei f_0 A - Spline. Dann gilt:

$$A' \circ f_0'' \in \partial \rho_A(f_0'') \cap R(M)^\perp \cap D_t^*(A).$$

Beweis:

- a) $A' \circ f_0'' \in R(M)^{\perp} \cap D_t^*(A)$ nach Def. (2.10).
 b) Für f_0'' ist Voraussetzung (†) von (3.24) erfüllt; da für alle $t \in I$ $\partial A(f_0''(t)) = \{A'(f_0''(t))\}$ gilt, folgt mit (3.24):
 $A' \circ f_0'' \in \partial \rho_A(f_0'')$.

(4.3) Satz:

Sei A S-Fkt. und $y \in \mathbb{R}^{n+4}$ IPV.

Dann ist äquivalent für $f_0 \in H_{\infty,2}(I)$:

- a) f_0 ist interpolierender A -Spline;
 b) i) $f_0'' \in D_t(A) \cap R(V(y))$,
 ii) $\rho_A(f_0'') = \min\{\rho_A(f'') \mid f' \in V(y)\}$.

Beweis:

"a) $\Rightarrow$ b)" i) gilt nach Def. (2.10);

ii) folgt aus (3.14) (setze dort $X := L_{\infty}(I)$, $F := \rho_A$,
 $G := -\delta_{R(V(y))}$, $x_0 := f_0''$) mit (4.2).

"b) $\Rightarrow$ a)" Nach (3.24) gilt: $\partial \rho_A(f_0'') = A' \circ f_0''$; mit ii) folgt aus
 (4.1) : $A' \circ f_0'' \in R(M)^{\perp}$; also erhält man a).

Diesen Satz (4.3) wollen wir nun auf die Beispiele in (2.12) anwenden.

(4.4) Beispiele:

Sei $y \in \mathbb{R}^{n+4}$ IPV. $K_+ := \{f \in H_{\infty,2}(I) \mid f''(t) \geq 0 \text{ fast überall}\}$.

(1) Sei f_0 "rationaler Spline" und $f_0 \in V(y)$; dann gilt:

$$\int_I f_0''(t)^{2/3} dt = \max\left\{\int_I f''(t)^{2/3} dt \mid f \in V(y) \cap K_+\right\}.$$

(2) Sei f_0 "logarithmischer Spline" und $f_0 \in V(y)$; dann gilt:

$$\int_I f_0''(t)^{1/2} dt = \max\left\{\int_I f''(t)^{1/2} dt \mid f \in V(y) \cap K_+\right\}.$$

(3) Sei f_0 "kubischer Spline" und $f_0 \in V(y)$; dann gilt:

$$\int_1 f_0''(t)^2 dt = \min \left\{ \int_1 f''(t)^2 dt \mid f \in V(y) \right\}.$$

(4) Sei f_0 "Exponential spline" und $f_0 \in V(y)$; dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_1 ((1 + |f_0''(t)|) \log(1 + |f_0''(t)|) - |f_0''(t)|) dt = \\ = \min \left\{ \int_1 ((1 + |f''(t)|) \log(1 + |f''(t)|) - |f''(t)|) dt \mid f \in V(y) \right\} \end{aligned}$$

(5) Sei f_0 "Rho5-Spline" und $f_0 \in V(y)$; dann gilt:

$$\int_1 f_0''(t)^{4/3} dt = \min \left\{ \int_1 f''(t)^{4/3} dt \mid f \in V(y) \right\}.$$

4.2 Das duale Variationsproblem

(4.5) Lemma:

Sei A S-Fkt. und $y \in \mathbb{R}^{n+4}$ IPV.

Es gelte: $D_t(A) \cap R(V(y)) \neq \emptyset$ Dann gilt:

$$\inf \{ \rho_A(f''(t)) \mid f \in V(y) \} = \max \left\{ \sum_{i=0}^{n+1} g(t_i) D_i(y) - \rho_{A^*}(g) \mid g \in R(M)^+ \right\}$$

Beweis:

Sei $f_0 \in D_t(A) \cap R(V(y))$; wegen (3.24) ist ρ_A in f_0 stetig; also gilt mit (3.15):

$$\inf \{ \rho_A(f'') \mid f \in V(y) \} = \max \{ (-\delta_{R(V(y))})^+(g) - \rho_{A^*}^*(g) \mid g \in L_\infty(I)^* \}.$$

Es gilt:

$$(i) \quad (-\delta_{R(V(y))})^+(g) = \begin{cases} \langle g, f_0 \rangle & , g \in R(M)^+ \\ -\infty & , g \notin R(M)^+ \end{cases}$$

¹⁾ $\rho_{A^*} : L_1(I) \ni g \mapsto \int_1 A^*(g(t)) dt \in \overline{\mathbb{R}}_\infty$

(ii) $\rho_A^*|L_1(I) = \rho_{A^*}$ nach (3.24).

Zu zeigen ist also noch:

(iii) $\langle g, f_0 \rangle = \sum_{i=0}^{n+1} g(t_i) D_i(y)$ für $g \in R(M)^\perp$.

Für $g \in R(M)^\perp$ gilt: $g(t) = \sum_{i=0}^{n+1} g(t_i) b_i(t)$, $t \in I$; sei $h_0 \in V(y)$

mit: $f_0 = R(h_0) = h_0''$; durch partielle Integration erhält man:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f_0(t) g(t) dt = h_0'(t_{i+1}) g(t_{i+1}) - h_0'(t_i) g(t_i) - (g(t_{i+1}) - g(t_i))(y_{i+1} - y_i) h_i^{-1} \text{ für } i=0, \dots, n.$$

Daraus folgt nach einer Summation (iii). ■

Bezeichnet man mit $\Psi_{A^*, y}$ (A S-Fkt., $y \in \mathbb{R}^{n+4}$ IPV) folgende Abbildung:

$$\mathbb{R}^{n+2} \ni z \mapsto \rho_{A^*}(g_z) = \sum_{i=0}^{n+1} z_i D_i(y) \quad (g_z \in R(M)^\perp!),$$

so erhält man:

(4.6) Folgerung:

Sei A S-Fkt. und $y \in \mathbb{R}^{n+4}$ IPV.

Es gelte: i) $\rho_A(f_0'') = \min\{\rho_A(f'') | f \in V(y)\}$,

ii) $D_t(A) \cap R(V(y)) \neq \emptyset$.

Dann ist für $z_0 \in \mathbb{R}^{n+2}$ äquivalent:

a) $g_{z_0} \in \partial \rho_A(f_0'')$;

b) $\Psi_{A^*, y}(z_0) = \min\{\Psi_{A^*, y}(z) | z \in \mathbb{R}^{n+2}\}$.

Beweis: (3.16) und (4.5). ■

(4.7) Satz:

Sei A S-Fkt., $y \in \mathbb{R}^{n+4}$ IPV und f_0 interpolierender

A - Spline. Dann gilt:

(1) $\rho_A(f_0'') = -\min\{\Psi_{A^*, y}(z) | z \in \mathbb{R}^{n+2}\}$.

- (2) Ist $z_0 \in \mathbb{R}^{n+2}$ mit: $\Psi_{A^*,Y}(z_0) = \min\{\Psi_{A^*,Y}(z) \mid z \in \mathbb{R}^{n+2}\}$,
so gilt:

$$\int_1^{\cdot} A_i^{-1}(g_{z_0}(t)) b_i(t) dt = D_i(Y) \quad , i=0, \dots, n+1.$$

Beweis:

(1) (4.5) und (4.6).

(2) (4.6) und (2.17).

(4.8) Bemerkungen:

1. Satz (4.7) zeigt, daß man eine Lösung des Gleichungssystems (GS), das bei der Berechnung eines interpolierenden A - Spline auftritt (siehe (2.18)), als Minimal-lösung von $\Psi_{A^*,Y}$ bekommen kann.
2. Von R. Schaback [18] wird dieses duale Variationsproblem unter gewissen Voraussetzungen ohne die Kenntnis der Extremaleigenschaft interpolierender A - Splines angegeben.

4.3 Existenz interpolierender A - Splines

Nach Satz (4.3) ist für die Existenz eines interpolierenden A - Spline notwendig, daß ρ_A in $R(V(Y))$ eine Minimallösung besitzt; dieser Zusammenhang soll nun näher untersucht werden. Hinreichende Bedingungen für die Existenz enthält folgender Satz:

(4.9) Satz:

Sei A S-Fkt. und $y \in \mathbb{R}^{n+4}$ IPV.

Es gelte: i) $D_t(A) \cap R(V(y)) \neq \emptyset$,

ii) $R(M)^\perp \cap \text{dom}(\rho_{A*}) \subset R(M)^\perp \cap D_t^*(A)$.

Dann existiert genau ein interpolierender A - Spline.

Beweis:

Nach (4.5) existiert wegen i) und ii) ein $z_0 \in \mathbb{R}^{n+2}$ mit:

a) $\inf\{\rho_A(f'') \mid f \in V(y)\} = -\Psi_{A*,y}(z_0)$,

b) $\Psi_{A*,y}(z_0) = \min\{\Psi_{A*,y}(z) \mid z \in \mathbb{R}^{n+2}\}$,

c) $g_{z_0} \in D_t^*(A) \cap R(M)^\perp$.

Aus b) und c) folgt:

$$\int_1^{\cdot} (A^*)'(g_{z_0}(t)) b_i(t) dt = D_i(y), \quad i=0, \dots, n+1.$$

Mit (2.18) folgt unter Berücksichtigung von $(A^*)' = A'^{-1}$

(siehe (3.11)) die Existenz eines interpolierenden A - Spline.

Die Eindeutigkeit folgt aus (2.15). ■

(4.10) Bemerkungen:

1. Die Voraussetzung i) in (4.9) ist nach (2.16) notwendig für die Existenz eines interpolierenden A - Spline; sie ist immer erfüllt für S(0)-Funktionen.
2. Voraussetzung ii) in (4.9) ist in der Regel leicht nachprüfbar; sie ist immer erfüllt für S(0)-Fkt.
3. Die Voraussetzung i) in (4.9) ist i. a. nicht leicht nachprüfbar; im folgenden Lemma wird für S(1)-Fkt. eine einfache hinreichende Bedingung angegeben. Natürlich kann ein analoges Lemma auch für S(2)-Fkt. formuliert werden.

(4.11) Lemma:

Sei A S(1)-Fkt. und $y \in \mathbb{R}^{n+4}$ IPV.

Es gelte: $D_i(y) > 0, i=0, \dots, n+1$. Dann gilt:

$$D_t(A) \cap R(V(y)) \neq \emptyset.$$

Beweis:

Zu zeigen ist:

Es existiert $f_0 \in C^2(I) \cap V(y)$ mit: $f_0''(t) > 0$ für alle $t \in I$.

Von R. Schaback [18a] wird gezeigt, daß sogar gilt:

Es existiert $f_0 \in C^2(I) \cap V(y)$ mit: i) $f_0''(t) > 0$ für alle $t \in I$,

$$\text{ii) } f_0|_{[t_i, t_{i+1}]} \in R_{2,1},$$

$$i=0, \dots, n+1. \quad \blacksquare$$

Das folgende Beispiel zeigt, daß auf die Voraussetzung ii) in (4.9) i. a. nicht verzichtet werden kann.

(4.12) Beispiel:

Wir wählen: $I=[0,1]$, $n=0$, $y=(-\frac{3}{2}, 1, 0, 0,)$,

$$A(u) := \begin{cases} \infty & , u \leq 0 \\ u^{-1} & , u > 0 \end{cases}.$$

Nach (4.11) gilt: $D_t(A) \cap R(V(y)) \neq \emptyset$. Für $g_0 \in R(M)^1$,

$g_0(t) := (1-t)$, gilt: $g_0 \in \text{dom}(\rho_{A^*}) \setminus D_t^*(A)$, d. h. ii) in

(4.9) ist nicht erfüllt. Da die Extremaleigenschaft

(siehe (4.7)) eine notwendige Bedingung für interpo-

lierende A - Splines darstellt und $f_0 \in V(y)$, $f_0(t) :=$

$(1-t)^{3/2}$, als einzige Funktion diese Extremaleigenschaft

besitzt (beachte (3.16) und (3.24)) und f_0 kein A - Spline

ist, folgt:

$$S_M^A(y) = \emptyset.$$

§5 Berechenbarkeit von A - Splines

Zur Berechnung des interpolierenden A - Spline wollen wir das duale Variationsproblem benützen; in 5.1 beschäftigen wir uns mit den Möglichkeiten hierzu. In 5.2 sind einige Beispiele und Ergebnisse aufgeführt.

5.1 Berechnung über das duale Variationsproblem

Die Hauptaufgabe bei der Berechnung des interpolierenden A - Spline besteht darin, einen Vektor $z \in \mathbb{R}^{n+2}$ zu finden, so daß $g_z \in R(M)^\perp$ folgendes i. a. nichtlineare Gleichungssystem löst:

$$(GS) \quad \int_1^t A'^{-1}(g_z(t)) b_i(t) dt = D_i(y) \quad , i=0, \dots, n+1.$$

Der direkte Weg, sich ein solches z zu beschaffen, besteht darin, Verfahren zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme anzuwenden. Da A'^{-1} nach Voraussetzung stetig differenzierbar ist, bieten sich dafür Newtonverfahren an. Dieser Weg soll hier jedoch nicht besprochen werden.

Die Kenntnis des dualen Variationsproblem gestattet es, die Lösung z des Gleichungssystems (GS) über ein Minimumproblem im $\mathbb{R}^{n+2}$ zu berechnen. Nach (4.7) lautet dieses Problem:

$$(P^*) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiere } \Psi_{A^*, y}(z) \text{ in } \mathbb{R}^{n+2} \text{ unter der Nebenbedingung} \\ g_z \in D_t^*(A). \end{array} \right.$$

(5.1) Eigenschaften von (P^*) :

- (1) Die Menge $K_A := \{z \in \mathbb{R}^{n+2} \mid g_z \in D_t^*(A)\}$ ist konvex.
- (2) $\Psi_{A^*, y}$ ist konvex auf K_A .
- (3) $\Psi_{A^*, y}$ ist in K_A zweimal stetig differenzierbar.

Wegen (3) in (5.1) sind zur Lösung von (P*) Gradientenverfahren anwendbar, die auch die Funktionalmatrix von $\Psi_{A^*, y}$ berücksichtigen. Bei Gradientenverfahren wird ein Startvektor benötigt.

(5.2) Startvektor für ein Gradientenverfahren

Ist g_z eine Lösung des Gleichungssystems (GS), so gilt für den interpolierenden A - Spline f_0 : $A' \circ f_0'' = g_z$, also:

$$(\#) \quad f_0''(t_i) = A'^{-1}(g_z(t_i)) = A'^{-1}(z_i), \quad i=0, \dots, n+1.$$

Als Näherung für $f_0''(t_i)$, $i=0, \dots, n+1$, kann man die zweiten Differenzenquotienten $D_i(y)h_i^{-1}$, $i=0, \dots, n+1$, ansehen.

Gilt für den Vektor $w \in \mathbb{R}^{n+2}$ mit den Komponenten $D_i(y)h_i^{-1}$: $w \in K_A$, so bietet sich wegen (#) folgender Startvektor $\tilde{z} \in \mathbb{R}^{n+2}$ an:

$$\tilde{z}_i := A'(D_i(y)h_i^{-1}), \quad i=0, \dots, n+1.$$

5.2 Beispiele und Ergebnisse

Als Minimierungsverfahren dient ein Gradientenverfahren von Fletcher - Powell [3]; dabei wird im wesentlichen der Algorithmus "Fleppmin" von M. Wells [22] verwendet. Dieser Algorithmus minimiert in seiner ursprünglichen Form zwar ohne Nebenbedingungen, diese können aber wegen ihrer einfachen Gestalt leicht eingebaut werden.

Als Beispiele betrachten wir folgende "Splinetypen":

(1) Rationale Splines (RAT):

$$A(u) := \begin{cases} \infty & , u < 0 \\ -\frac{3}{2} u^{2/3} & , u \geq 0 \end{cases}$$

Damit gilt:

$$i) \quad A^*(v) = \begin{cases} \frac{1}{2} |v|^{-2} & , v < 0 \\ \infty & , v \geq 0 \end{cases}$$

ii) Nebenbedingungen: $K_A = \{z \in \mathbb{R}^{n+2} \mid z_i < 0 \text{ für } i=0, \dots, n+1\}$

$$iii) \quad \Psi_{A^*, y}(z) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n h_i z_i^{-1} z_{i+1}^{-1} - \sum_{i=0}^{n+1} z_i D_i(y)$$

(2) Logarithmische Splines (LOG):

$$A(u) := \begin{cases} \infty & , u < 0 \\ -2u^{\frac{1}{2}} & , u \geq 0 \end{cases}$$

Damit gilt:

$$i) \quad A^*(v) := \begin{cases} |v|^{-1} & , v < 0 \\ \infty & , v \geq 0 \end{cases}$$

ii) Nebenbedingungen: $K_A = \{z \in \mathbb{R}^{n+2} \mid z_i < 0 \text{ für } i=0, \dots, n+1\}$

$$iii) \quad \Psi_{A^*, y}(z) = \sum_{i=0}^n h_i w_i - \sum_{i=0}^{n+1} z_i D_i(y) \quad \text{wobei:}$$

$$w_i := \begin{cases} \log(|z_i|) & , z_{i+1} = z_i \\ (|z_{i+1}| - |z_i|)^{-1} \log(|z_{i+1}| |z_i|^{-1}) & , z_{i+1} \neq z_i \end{cases}$$

(3) Kubische Splines (KUB):

$$A(u) := \frac{1}{6} |u|^2$$

Damit gilt:

$$i) \quad A^*(v) = \frac{1}{2} |v|^2$$

ii) Keine Nebenbedingungen

$$iii) \quad \Psi_{A^*, y}(z) = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^n h_i (z_{i+1}^2 + z_{i+1} z_i + z_i^2) - \sum_{i=0}^{n+1} z_i D_i(y)$$

(4) Exponentialsplines (EXPO):

$$A(u) := (1 + |u|) \log(1 + |u|) - |u|$$

Damit gilt:

i) $A^*(v) = \exp(|v|) - |v| - 1.$

ii) Keine Nebenbedingungen.

iii) $\forall_{A^*, y}(z) = \sum_{i=0}^n h_i w_i - \sum_{i=0}^{n+1} z_i D_i(y),$ wobei

$$w_i := \begin{cases} \exp(|z_i|) - |z_i| - 1 & , z_{i+1} = z_i \\ (|z_{i+1}| - |z_i|)^{-1} (\exp(|z_{i+1}|) - \exp(|z_i|) - \frac{1}{2}(|z_{i+1}|^2 - |z_i|^2)) & , z_{i+1} \neq z_i \end{cases}$$

(5) Rho5 - Splines (RH05):

$$A(u) := \frac{3}{4} |u|^{4/3}$$

Damit gilt:

i) $A^*(v) = \frac{1}{4} |v|^4.$

ii) Keine Nebenbedingungen.

iii) $\forall_{A^*, y}(z) = \frac{1}{20} \sum_{i=0}^n h_i (z_{i+1}^4 + z_{i+1}^3 z_i + z_{i+1}^2 z_i^2 + z_{i+1} z_i^3 + z_i^4) - \sum_{i=0}^{n+1} z_i D_i(y).$

Als Startvektor kann für alle fünf Splinetypen der in (5.2) angegebene Vektor benützt werden (beachte: für S(1)-Fkt. ist $D_i(y) h_i^{-1}$, $i=0, \dots, n+1$, notwendig für die Existenz eines interpolierenden A - Spline).

(5.3) Bei den Beispielen hat sich gezeigt, daß die Wahl des Startvektors gemäß (5.2) gut geeignet ist.

Hat man ein $g \in C^1(I)$ und S-Fkt. $A_1, \dots, A_1$ gegeben und definiert man $y_g := (g'(a), g(a), g(t_1), \dots, g(b), g'(b)) \in \mathbb{R}^{n+4}$, so stellt sich die Frage, ob aus y_g auf die Fehlergrößen $e_i := \|f_i - g\|_\infty$

(f_i interpolierende A_i - Splines) geschlossen werden kann.

(5.4) Bezeichnungen:

Sei A S-Fkt. und $n \geq 3$. Für den Interpolationsvektor y

gelte: $D_i(y)h_i^{-1} \in D(A)$ für $i=0, \dots, n+1$.

$$1. m(A, y) := (n-1)^{-1} \sum_{i=1}^{n-1} (A'(D_{i+1}(y)h_{i+1}^{-1}) - A'(D_i(y)h_i^{-1})).$$

$$2. r(A, y) := \sum_{i=1}^{n-1} |A'(D_{i+1}(y)h_{i+1}^{-1}) - A'(D_i(y)h_i^{-1}) - m(A, y)|.$$

$$3. R(A, y) := r(A, y) m(A, y)^{-1} \text{ falls } m(A, y) \neq \emptyset.$$

(5.5) Bei den Beispielen hat sich gezeigt, daß die Größe $R(A, y)$

einen Schluß auf den zu erwartenden Fehler $\|f-g\|_\infty$

(f g -interpolierender A - Spline) im Vergleich zu anderen S-Fkt. zuläßt.

Bei den numerischen Beispielen wurde stets eine äquidistante Zerlegung von I angenommen (Schrittweite h).

In den folgenden Tabellen benützen wir folgende Bezeichnungen:

1. $N := n+1$ (Anzahl der Teilintervalle).

2. Sei A S-Fkt., $g \in C^1(I)$ und f_A der g -interpolierende A - Spline.

a) $E_A(A, g) := \|f_A - g\|_\infty;$

b) $E_T(A, g) := \max\{|f_A(t) - g(t)| |g(t)|^{-1} |t \in I, g(t) \neq 0\};$

c) $R(A, g) := R(A, y_g) \cdot 10^{-3}.$

(5.6) Interpolation von $g(t) := \tan(t)$ in $[0, \pi/4]$ ¹⁾

N		RAT	LOG	KUB	EXPO	RHO5
6	R(A,g)	15	18	14	5	3
	E _a (A,g)	4.0'-5	4.4'-5	5.0'-5	1.8'-5	2.2'-5
	E _r (A,g)	6.0'-4	6.6'-4	5.7'-5	4.5'-5	3.4'-4
9	R(A,g)	36	42	31	10	8
	E _a (A,g)	1.2'-5	1.3'-5	1.1'-5	3.8'-6	6.3'-6
	E _r (A,g)	2.7'-4	2.9'-4	1.2'-5	1.5'-5	1.6'-4
12	R(A,g)	59	73	47	15	15
	E _a (A,g)	5.5'-6	5.2'-6	3.5'-6	1.3'-6	2.6'-6
	E _r (A,g)	1.7'-4	1.8'-4	3.3'-6	6.5'-6	8.6'-5

¹⁾ Siehe hierzu [18a].

(5.7) Interpolation von $g(t) := \frac{e^t}{1.5 - t}$ in $[3/4, 1]$

N		RAT	LOG	KUB	EXPO	RHO5
6	$R(A, g)$	0	2	11	3	5
	$E_a(A, g)$	2.5'-7	3.2'-6	2.5'-5	6.1'-6	1.2'-5
	$E_r(A, g)$	5.1'-8	6.3'-7	4.8'-6	1.2'-6	2.3'-6
9	$R(A, g)$	0	3	23	6	11
	$E_a(A, g)$	6.9'-8	8.4'-7	5.1'-6	1.3'-6	2.5'-6
	$E_r(A, g)$	1.3'-8	1.6'-7	9.7'-7	2.4'-7	4.7'-7
12	$R(A, g)$	1	5	33	9	16
	$E_a(A, g)$	1.6'-8	2.3'-7	1.6'-6	4.1'-7	7.9'-7
	$E_r(A, g)$	3.5'-9	4.4'-8	3.1'-7	7.7'-8	1.5'-7

(5.8) Interpolation von $g(t) := \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{5} + \frac{t^2}{2} + t$ in $[1,2]$

N		RAT	LOG	KUB	EXPO	RHO5
5	R(A,g)	3	4	2	2	1
	E _a (A,g)	3.9'-5	4.7'-5	2.6'-5	2.0'-5	6.9'-6
	E _r (A,g)	1.5'-5	1.8'-5	1.0'-5	5.6'-6	2.0'-6
10	R(A,g)	13	16	9	6	2
	E _a (A,g)	2.5'-6	3.0'-6	1.6'-6	1.3'-6	5.5'-7
	E _r (A,g)	9.7'-7	1.2'-6	7.0'-7	3.6'-7	1.2'-7
20	R(A,g)	30	40	22	16	6
	E _a (A,g)	1.7'-7	2.4'-7	1.2'-7	1.1'-7	8.1'-8
	E _r (A,g)	5.9'-8	7.8'-8	4.5'-8	2.5'-8	1.5'-8

Kapitel II: Splines in Orlicz-Räumen

§6 Orlicz-Räume

In diesem Abschnitt stellen wir die wesentlichen Aussagen über Orlicz-Räume bereit. Dazu führen wir zunächst in 6.1 eine Klasse von reellen Funktionen ein, die die Orlicz-Räume beschreiben. Nach der Definition dieser Räume in 6.2 geben wir in 6.3 die Ergebnisse an, die im weiteren Verlauf benötigt werden.

6.1 Verallgemeinerte Young-Funktionen

(6.1) Definition:

Eine Funktion $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Young-Funktion (Y-Fkt.), wenn gilt: i) A ist konvex und stetig;
ii) $A(0) = 0$, $A \neq 0$;
iii) $A(u) = A(|u|)$ für alle $u \in \mathbb{R}$.

Aus der Definition (6.1) lassen sich ohne Schwierigkeiten einfache Folgerungen ziehen.

(6.2) Folgerungen:

Sei A Y-Fkt. Dann gilt:

- (1) $A(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+$;
- (2) A ist monoton wachsend in $\mathbb{R}_+$;
- (3) Für $q \in [0,1]$ gilt: $A(qu) \leq qA(u)$ für alle $u \in \mathbb{R}_+$;
- (4) Für $q \in [1,\infty)$ gilt: $A(qu) \geq qA(u)$ für alle $u \in \mathbb{R}_+$;
- (5) $A'_-(u) := \lim_{\epsilon \downarrow 0} \epsilon^{-1}(A(u) - A(u-\epsilon))$ existiert f. a. $u \in \mathbb{R}$;
- (6) $A'_+(u) := \lim_{\epsilon \downarrow 0} \epsilon^{-1}(A(u+\epsilon) - A(u))$ existiert f. a. $u \in \mathbb{R}$;
- (7) Für alle $u \in \mathbb{R}$ gilt: $\partial A(u) = [A'_-(u), A'_+(u)]$.

Aus Def. (2.5) folgt, daß jede symmetrische $S(0)$ -Fkt. auch eine Y-Fkt. ist, falls $A(0) = 0$ gilt; die Umkehrung gilt nicht.

(6.3) Beispiele:

Y-Funktionen sind:

$$1. A_p: \mathbb{R} \ni u \mapsto p^{-1} |u|^p \in \mathbb{R}, \quad p \in [1, \infty);$$

$$2. A_1: \mathbb{R} \ni u \mapsto (1+|u|)\log(1+|u|) - |u|;$$

$$3. A_e: \mathbb{R} \ni u \mapsto \exp(|u|) - |u| - 1;$$

In (3.12) ergab sich, daß mit A auch A^* $S(0)$ -Fkt. ist. Eine ähnliche Aussage gilt für Y-Fkt., wie folgendes Beispiel zeigt, nicht.

(6.4) Beispiel:

Für die Y-Fkt. $A_1: \mathbb{R} \ni u \mapsto |u| \in \mathbb{R}$ gilt:

$$A_1^*(v) = \begin{cases} 0 & , |v| \leq 1 \\ \infty & , |v| > 1 \end{cases}$$

(6.5) Definition:

Eine Funktion $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_\infty$ heißt verallgemeinerte Young-Funktion (VY-Fkt.), wenn gilt: i) $A \in \Gamma(\mathbb{R})$,

ii) A oder A^* ist Y-Fkt.

Aus dieser Definition folgt, daß jede VY-Fkt. symmetrisch ist.

(6.6) Folgerung:

Sei A VY-Fkt. Dann ist äquivalent:

a) A ist keine Y-Fkt.;

$$b) \bigvee_{k_0 > 0} \bigwedge_{u \in \mathbb{R}_+} ((A^*)_+(u) \leq k_0);$$

$$c) \bigvee_{u_0 > 0} \bigwedge_{u \geq u_0} (A(u) = \infty).$$

Beweis:

"a) $\Rightarrow$ b)" A^* ist Y-Fkt. Annahme: b) gilt nicht; sei $u \in \mathbb{R}_+$;
dann existiert $v \in \mathbb{R}$ mit: $u \in \partial A^*(v)$; aus (3.10) folgt:
 $v \in \partial A(u)$, also $u \in \text{dom}(A)$; da $A = A^{**}$ nach (3.5) und
 $\text{dom}(A) = \mathbb{R}$ gilt, folgt im Widerspruch zu a): A ist
Y-Fkt.

"b) $\Rightarrow$ c)" $A(u) = \sup\{uv - A^*(v) \mid v \in \mathbb{R}\} \geq v(u - v^{-1}A^*(v)) >$
 $v(u - k_0)$; also folgt: $A(u) = \infty$ für $u > k_0$.

"c) $\Rightarrow$ a)" trivial. ■

(6.7) Beispiele:

$$(1) \quad A_\infty : \mathbb{R} \ni u \mapsto \begin{cases} 0 & , |u| \leq 1 \\ \infty & , |u| > 1 \end{cases} \quad \text{ist VY-Fkt.}$$

$$(2) \quad A_p^* = A_q \quad , \quad p, q \in [1, \infty] \text{ mit } p^{-1} + q^{-1} = 1.$$

$$(3) \quad A_e^* = A_1 \quad , \quad A_1^* = A_e \quad (\text{siehe (6.3)}).$$

6.2 Definition der Orlicz-Räume

Für die weiteren Untersuchungen in diesem Paragraphen sei T
eine Lebesgue-Menge in $\mathbb{R}$.¹⁾ Mit $M(T)$ bezeichnen wir die Menge
der meßbaren Funktionen $f : T \rightarrow \mathbb{R}$.

Ist A VY-Fkt., so gilt mit $f \in M(T)$ auch $A \circ f \in M(T)$ (beachte:
 $A \in \Gamma(\mathbb{R})$). Damit sind folgende Bezeichnungen sinnvoll:

$$1. \quad \rho_A : M(T) \ni f \mapsto \int_T A(f(t)) dt \in \mathbb{R}_\infty ; \quad P_A := \text{dom}(\rho_A);$$

$$C_A := \{f \in P_A \mid \rho_A(f) \leq 1\}.$$

¹⁾ Die folgenden Untersuchungen können allgemein in einem Maß-
raum (Ω, Σ, μ) durchgeführt werden.

$$2. \quad \mu_A : M(T) \ni f \mapsto \inf\{k \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \mid k^{-1}f \in C_A\} \in \mathbb{R}_\infty ;$$

$$L_A := L_A(T) := \text{dom}(\mu_A).$$

$$3. \quad \mu_{(A)} : M(T) \ni f \mapsto \sup\left\{\int_T |f(t)g(t)| dt \mid g \in C_{A^*}\right\};$$

$$L_{(A)} := L_{(A)}(T) := \text{dom}(\mu_{(A)}).$$

(6.8) Beispiele:

$$(1) \quad P_{A_p} = L_{A_p} = L_{A_p} = L_p \quad \text{für } p \in [1, \infty).$$

$$(2) \quad P_{A_\infty} = \{f \in M(T) \mid |f(t)| \leq 1 \text{ fast überall}\};$$

$$L_{A_\infty} = L_{(A_\infty)} = L_\infty.$$

$$(3) \quad \text{Sei } f \in L_{A_p} \text{ mit } p \in (1, \infty). \text{ Dann gilt:}$$

$$\mu_{A_p}(f) = p^{-p-1} \|f\|_p, \quad \mu_{(A_p)}(f) = q^{q-1} \|f\|_p \quad (p^{-1} + q^{-1} = 1).$$

$$(4) \quad \text{Sei } f \in L_{A_\infty}. \text{ Dann gilt: } \mu_{A_\infty}(f) = \mu_{(A_\infty)}(f) = \|f\|_\infty.$$

(6.9) Definition:

Sei A VY-Fkt.

a) Die Abbildung $\| \cdot \|_A : L_A \ni f \mapsto \mu_A(f) \in \mathbb{R}_+$ heißt die Luxemburg-Norm auf L_A .

b) Die Abbildung $\| \cdot \|_{(A)} : L_{(A)} \ni f \mapsto \mu_{(A)}(f) \in \mathbb{R}_+$ heißt die Lorentz-Norm auf $L_{(A)}$.

(6.10) Satz:

Sei A VY-Fkt. Dann gilt:

$$(1) \quad L_A = L_{(A)};$$

$$(2) \quad \|f\|_A \leq \|f\|_{(A)} \leq 2\|f\|_A \quad \text{für alle } f \in L_A;$$

$$(3) \quad (L_A, \| \cdot \|_A) \text{ ist Banachraum.}$$

Beweis:

(1) [13], S.47 Th.2; (2) [13], S.48 Th.2; (3) [13], S.45 Th.1.

Ein wichtiges Beweishilfsmittel in der Theorie der Orlicz-Räume stellt das Lemma von Fatou und die Youngsche Ungleichung dar. Diese wird auch beim Beweis der "Hölderungleichung" in Orlicz-Räumen benutzt. Sie lautet ([13], S.47):

$$(6.11) \quad \int_{\mathbb{T}} |f(t)g(t)| dt \leq \|f\|_A \|g\|_{(A^*)} \quad \text{für alle } (f,g) \in L_A \times L_{A^*}.$$

Aus (6.8) folgt, daß (6.11) in L_p -Räumen die bekannte Hölderungleichung ergibt.

Mit (6.11) erhält man auch (siehe (3.18)):

(6.12) (L_A, L_{A^*}) ist für jede VY-Fkt. ein zerlegbares Paar.

6.3 Separabilität und Reflexivität von Orlicz-Räumen

(6.13) Definition:

$$\text{Sei } A \text{ VY-Fkt.} \quad E_A := \bigcap_{\alpha > 0} \alpha P_A.$$

Ist A VY-Fkt. aber keine Y-Fkt., so folgt aus (6.6):

i) $E_A = \{0\}$ und ii) $L_A = L_\infty$.

Ist dagegen A Y-Fkt., so gilt ([13], S.55 Th.1):

E_A ist der Abschluß in L_A der Menge der Treppenfunktionen, die außerhalb einer Menge endlichen Maßes verschwinden. Daraus erhält man:

(6.14) (L_A, E_{A^*}) ist für jede VY-Fkt. A , deren Konjugierte A^* eine Y-Fkt. ist, ein zerlegbares Paar.

(6.15) Satz:

Sei A Y -Fkt. Dann gilt:

- (1) E_A ist separabel;
- (2) $(E_A, \|\cdot\|_A)^*$ ist isometrisch isomorph $(L_{A^*}, \|\cdot\|_{(A^*)})$;
- (3) Es ist äquivalent:
 - a) L_A reflexiv;
 - b) $E_A = L_A, E_{A^*} = L_{A^*}$.

Beweis:

- (1) [13], S.35, Cor.2; (2) [13], S.56, Th.2;
- (3) [13], S.60, Th.5.

Wie man leicht sieht, gilt für $p \in [1, \infty)$: $E_{A_p} = L_{A_p}$. Folgendes Lemma gibt eine Antwort darauf, wann $E_A = L_A$ für beliebige Y -Fkt. A gilt.

(6.16) Lemma:

Sei A Y -Fkt. Dann gilt:

- (1) Ist $\mu(T)$ endlich, so ist äquivalent:
 - a) $E_A = P_A = L_A$;
 - b) $\bigvee_{m>0} \bigvee_{u_0 \geq 0} \bigwedge_{u \geq u_0} (A(2u) \leq mA(u))$;
- (2) Ist $\mu(T)$ nicht endlich, so ist äquivalent:
 - a) $E_A = P_A = L_A$;
 - b) $\bigvee_{m>0} \bigwedge_{u \geq 0} (A(2u) \leq mA(u))$.

Beweis: [13], S.58, Th.3.

(6.17) Beispiele:

- 1. L_{A_p} ist separabel für $p \in [1, \infty)$ und reflexiv für $p \in (1, \infty)$.
- 2. L_{A_1} ist separabel aber nicht reflexiv.

$$3. \quad A(u) := \begin{cases} 0 & , u=0 \\ |u|^{\alpha} (|\log(|u|)| + 1) & , u \neq 0 \end{cases} \quad \alpha > 1.$$

Dann ist L_A reflexiv.

Zum Abschluß geben wir noch ein Lemma an, das etwas über die Stetigkeit von ρ_A in L_A (in der Normtopologie) aussagt.

(6.18) Lemma:

Sei A VY-Fkt.

Konvergiert eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in L_A gegen ein $f \in L_A$ und gibt es ein $k_0 > 0$ mit: $\rho_A(k_0 f_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt:

$$\rho_A(kf) = \lim_n \rho_A(kf_n) \quad \text{für alle } k \in [0, k_0).$$

Beweis: [13], S.45, L1.

§7 Die Räume $H_{A,m}(I)$

In diesem Paragraphen sollen, ausgehend von einem Orlicz-Raum L_A , die Räume $H_{A,m}(I)$, $m \in \mathbb{N}$, in analoger Weise, wie dies bei L_p -Räumen geschieht, eingeführt werden. Die in §8 definierten Splines werden Elemente dieser Räume sein.

7.1 Definition von $H_{A,m}(I)$

Sei I ein Intervall in $\mathbb{R}$ (nicht notwendig endlich), A eine VY-Fkt. und $L_A = L_A(I)$ der zugehörige Orlicz-Raum.

(7.1) Definition:

a) Sei $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$AC_m := AC_m(I) := \{f \in C(I) \mid f^{(m)} \text{ existiert und ist absolut stetig}\}.$

b) Sei $m \in \mathbb{N}$.

$H_{A,m} := H_{A,m}(I) := \{f \in AC_{m-1} \mid f^{(m)} \in L_A\}.$

c) Sei $m \in \mathbb{N}$ und seien $t_1 < \dots < t_m$ Punkte in I .

$\|\cdot\|_{A,m} : H_{A,m} \ni f \mapsto \sum_{i=1}^m |f(t_i)| + \|f^{(m)}\|_A.$

(7.2) Satz:

$(H_{A,m}, \|\cdot\|_{A,m})$ ist Banachraum.

Beweis:

a) $\|\cdot\|_{A,m}$ ist offensichtlich eine Seminorm in $H_{A,m}$; sei $\|f\|_{A,m} = 0$;
 $\Rightarrow f \in P_{m-1}$ und $f(t_i) = 0, i=1, \dots, m$; daraus folgt: $f = 0$.

b) Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $H_{A,m}$; dann gilt:

i) $(f_n(t_i))_{n \in \mathbb{N}}$ sind CF in $\mathbb{R}, i=1, \dots, m$,

ii) $(f_n^{(m)})_{n \in \mathbb{N}}$ ist CF in L_A .

Also existieren $r_1, \dots, r_m \in \mathbb{R}$ und $g \in L_A$ mit: $\|f_n^{(m)} - g\|_A \rightarrow 0$,
 $|f_n(t_i) - r_i| \rightarrow 0, i=1, \dots, m$; sei f das m -fache Integral von g mit:
 $f(t_i) = r_i, i=1, \dots, m$; dann gilt: $f \in H_{A,m}$ und $\lim_n \|f_n - f\|_{A,m} = 0$.
 Also ist $H_{A,m}$ vollständig. ■

(7.3) Bemerkung:

Ist $\mu(I)$ endlich, so gilt: $H_{A,m} = \{f \in AC_{m-1} \cap L_A \mid f^{(m)} \in L_A\}$.

(7.4) Lemma:

Sei $\mu(I) < \infty$. Dann gilt:

$$\bigvee_{\gamma \geq 0} \bigwedge_{f \in H_{A,m}} \bigwedge_{0 \leq k \leq m-1} (\|f^{(k)}\|_\infty \leq \gamma \|f\|_{A,m}).$$

Beweis: Induktion nach m .

$m=1$: $f(t) = f(t_1) + \int_{t_1}^t f'(s)ds$ für alle $t \in I$; nach (6.11) erhält
 man daraus: $|f(t)| \leq |f(t_1)| + \|x_I\|_{(A^*)} \|f'\|_A$;
 $\Rightarrow \|f\|_\infty \leq \gamma (|f(t_1)| + \|f'\|_A)$.

$m=2$: Den Fall: $k=0$ beweist man wie bei $m=1$.

Sei $\xi \in I$ mit: $f'(\xi) = (t_2 - t_1)^{-1}(f(t_2) - f(t_1))$.
 $\Rightarrow f'(t) = f'(\xi) + \int_\xi^t f''(s)ds$ für alle $t \in I$;
 $\Rightarrow |f'(t)| \leq (t_2 - t_1)^{-1}(|f(t_1)| + |f(t_2)|) + \|x_I\|_{(A^*)} \|f''\|_A$;
 $\Rightarrow \|f'\|_\infty \leq \gamma \|f\|_{A,m}$.

Der Fall: " $m \geq 3$ " läßt sich nun durch folgende Tatsache:

$f \in H_{A,m} \Rightarrow f \in H_{A,m-1}$ und $f^{(m-2)} \in H_{A,2}$ mit der Induktionsvor-
 aussetzung für $H_{A,m-1}$ und $H_{A,2}$ leicht beweisen. ■

(7.5) Folgerung:

Punktfunktionale von der Form:

$H_{A,m} \ni f \mapsto f^{(i)}(\xi) \in \mathbb{R}$ mit: $0 \leq i \leq m-1, \xi \in I$

sind stetige lineare Funktionale auf $H_{A,m}$ ($\mu(I)$ beliebig).

7.2 Lineare Operatoren auf $H_{A,m}$

(7.6) Sei $R : H_{A,m} \rightarrow L_A$ ein linearer Operator.

Eine Funktion $\kappa : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt ein Integralkern von R, wenn gilt:

i) $\kappa(t, \cdot) \in M(I)$ für alle $t \in I$,

ii) $\bigwedge_{f \in H_{A,m}} \bigvee_{u \in Z(R)} \bigwedge_{t \in I} (f(t) = u(t) + \int_I \kappa(t,s) Rf(s) ds)$
 $(Z(R) := \{u \in H_{A,m} \mid R(u) = \theta\})$.

(7.7) Beispiele:

(1) $R : H_{A,m} \ni f \mapsto f^{(m)} \in L_A$. Dann gilt:

a) R ist stetiger linearer Operator auf $H_{A,m}$;

b) $\kappa : I \times I \ni (t,s) \mapsto \begin{cases} 0 & , t < s \\ \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!} & , t \geq s \end{cases}$

ist Integralkern von R.

(2) Sei $\mu(I) < \infty$.

$R : H_{A,m} \ni f \mapsto \sum_{j=0}^m a_j f^{(j)}(\cdot)$ mit $a_j \in C^j(I)$, $j=0, \dots, m$,
 $a_m(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.

Dann gilt:

a) $R(H_{A,m}) \subset L_A$ (siehe (7.5));

b) R ist stetiger linearer Operator auf $H_{A,m}$;

c) $\kappa : I \times I \ni (t,s) \mapsto \begin{cases} 0 & , t < s \\ \tilde{\kappa}(t,s) & , t \geq s \end{cases}$

mit: i) $\tilde{\kappa}(\cdot, s) \in Z(R)$ für alle $s \in I$,

ii) $D_{(t)}^j \tilde{\kappa}(t,s) \big|_{t=s} = \delta_{j,m-1}$, $j=0, \dots, m-1$,

ist Integralkern von R (siehe [10], S.38).

(7.8) Bemerkungen:

Sei κ ein Integralkern eines linearen Operators $R : H_{A,m} \rightarrow L_A$.

1. Es gilt i. a. nicht: $\kappa(\cdot, s) \in H_{A,m}$ für $s \in I$.

2. Ist $\lambda \in H_{A,m}^*$, so gilt für $f \in H_{A,m}$, $f(\cdot) = u(\cdot) +$

$$\int_I \kappa(\cdot, s) Rf(s) ds:$$

$$\langle \lambda, f \rangle = \langle \lambda, u \rangle + \langle \lambda, \int_I \kappa(\cdot, s) Rf(s) ds \rangle.$$

(7.9) Bezeichnung:

Sei κ ein Integralkern eines linearen Operators $R : H_{A,m} \rightarrow L_A$

und sei W ein Teilraum von L_A^* . Mit $\Lambda(\kappa, W)$ bezeichnen wir

die Teilmenge der stetigen linearen Funktionale $\lambda \in H_{A,m}^*$,

für die gilt:

a) Die Abbildung $\lambda_\kappa : I \ni s \mapsto \langle \lambda, \kappa(\cdot, s) \rangle$ ist meßbar und es gilt: $\lambda_\kappa \in W$;

b) Für jedes $f \in H_{A,m}$ gilt:

$$\langle \lambda, \int_I \kappa(\cdot, s) Rf(s) ds \rangle = \int_I \lambda_\kappa(s) Rf(s) ds.$$

(7.10) Beispiel:

Ist λ ein Punktfunktional von der Form:

$$\lambda : H_{A,m} \ni f \mapsto f^{(j)}(\xi) \in \mathbb{R}, \quad j \in \{0, \dots, m-1\}, \quad \xi \in I,$$

so gilt in (7.7) (2):

a) $\lambda \in \Lambda(\kappa, L_A^*)$;

b) $\lambda \in \Lambda(\kappa, E_{A^*})$ falls A^* Y-Fkt. ist.

§8 Splines in Orlicz-Räumen

Nach den Vorbereitungen in §6 und §7 kommen wir nun zur Untersuchung von Splines in Orlicz-Räumen. In 8.1 definieren wir die Splines und geben einfache Folgerungen an. Die Sätze (8.12), (8.17) und (8.18) in 8.2 machen Aussagen über die Existenz von Splines. Nach einer Untersuchung der dualen Variationsprobleme in 8.3 geben wir in 8.4 Charakterisierungen für Splines an.

8.1 Definition von Splines

Für diesen Paragraphen sei ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und ein $m \in \mathbb{N}$ fest gegeben.

(8.1) Definition:

Sei A VY-Fkt., $R : H_{A,m} \rightarrow L_A$ linearer stetiger Operator und K eine konvexe Menge in $H_{A,m}$ ($K \neq \emptyset$).

a) $k_0 \in K$ heißt N_A -Spline, wenn gilt:

$$\|R(k_0)\|_A = \min\{\|R(k)\|_A \mid k \in K\}.$$

b) $k_0 \in K$ heißt M_A -Spline, wenn gilt:

$$\rho_A(R(k_0)) = \min\{\rho_A(k) \mid k \in K\} < \infty.$$

Im folgenden wollen wir stets die allgemeine Situation der Def.

(8.1) als gegeben ansehen.

(8.2) Bemerkungen:

1. Die Definition der N_A -Splines entspricht der üblichen Definition von Splines in Banachräumen (siehe etwa [8b]).
2. Für die Y-Fkt. A_p , $p \in [1, \infty)$, gilt:
 $k_0 \in K$ ist N_A -Spline genau dann, wenn k_0 M_A -Spline ist.
3. Nach Def. (8.1) ist notwendig für die Existenz eines

M_A - Spline: $P_A \cap R(K) \neq \emptyset$; dies ist immer erfüllt,
wenn $E_A = L_A$ gilt (siehe (6.13) und (6.16)).

Vergleicht man die Definition der $S(0)$ -Fkt. (siehe (2.5)) mit der der Y -Fkt., so stellt man fest:

A symmetrische $S(0)$ -Fkt., $A(0) = 0 \Rightarrow A$ Y -Fkt..

Aus den Ergebnissen des §4 wird ersichtlich, daß sich das Problem der A - Splines (A symmetrische $S(0)$ -Fkt., $A(0)=0$) hier einordnen läßt.

(8.3) Definition:

- a) $N_A(K) := \{k \in K \mid k \text{ } N_A\text{- Spline}\};$
- b) $M_A(K) := \{k \in K \mid k \text{ } M_A\text{- Spline}\}.$

(8.4) Folgerung

- a) $N_A(K), M_A(K)$ ist konvex;
- b) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt: $N_A(\alpha K) = \alpha N_A(K).$

Die Frage nach der Eindeutigkeit der N_A - bzw. M_A - Splines zerfällt in der Regel in zwei Probleme:

(E1) Eindeutigkeit von $f_0 \in R(K)$ mit:

$$\|f_0\|_A = \min\{\|f\|_A \mid f \in R(K)\} \text{ bzw. } \rho_A(f_0) = \min\{\rho_A(f) \mid f \in R(K)\}.$$

(E2) Injektivität von R auf $N_A(K)$ bzw. $M_A(K).$

(8.5) Bezeichnungen:

- a) $NP_{R(K)} := \{f_0 \in L_A \mid \|f_0\|_A = \min\{\|f\|_A \mid f \in R(K)\}\};$
- b) $MP_{R(K)} := \{f_0 \in P_A \mid \rho_A(f_0) = \min\{\rho_A(f) \mid f \in R(K) \cap P_A\}\}.$

Bekanntlich ist hinreichend dafür, daß $NP_{R(K)}$ höchstens ein Element enthält:

L_A ist gleichmäßig konvex.¹⁾

¹⁾Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ heißt gleichmäßig konvex, wenn gilt:

$$\bigwedge_{0 < \epsilon \leq 2} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x, y \in X} (\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x-y\| \geq \epsilon \Rightarrow \frac{1}{2}\|x+y\| \leq 1-\delta).$$

(8.6) Lemma:

Es gelte: i) $E_A = L_A$ (also A Y-Fkt.);

$$\text{ii) } \bigvee_{0 < a < 1} \bigvee_{0 < b < 1} \bigwedge_{u \geq 0} \bigwedge_{0 \leq b \leq a} (A((u+bu)/2) \leq (1-b)(A(u) + \frac{1}{2}A(bu))) .$$

Dann gilt: $NP_{R(K)}$ enthält höchstens ein Element.

Beweis:

Nach [13], S. 63 u. 65, ist i) u. ii) hinreichend für:

L_A ist gleichmäßig konvex.

(8.7) Beispiele:

Die Voraussetzungen von (8.6) erfüllt:

1. $A_p, p \in (1, \infty);$

$$2. A(u) := \begin{cases} 0 & , u = 0 \\ |u|^\alpha (\log(|u|) + 1) & , u \neq 0 \end{cases} , \alpha > 1.$$

(8.8) Lemma:

Sei A Y-Fkt. und es gelte:

i) $A \in C^1(\mathbb{R});$

ii) Es existiert eine strikt monoton wachsende Y-Fkt. $A_1 \in C^1(\mathbb{R})$

$$\text{mit: } \bigwedge_{u_0 \geq 0} \bigwedge_{u \geq u_0} (A'(u+u_0) - A'(u) \geq A_1'(u_0)) .$$

Dann gilt: $MP_{R(K)}$ enthält höchstens ein Element.

Beweis:

a) Es gilt: $\frac{1}{2}A(u) + \frac{1}{2}A(v) - A(\frac{1}{2}(u+v)) \geq A_1(\frac{1}{2}|u-v|)$; denn:

sei o. E. $u \geq v \geq 0$; dann folgt:

$$\frac{1}{2}A(u) + \frac{1}{2}A(v) - A(\frac{1}{2}(u+v)) = \int_0^{\frac{1}{2}(u-v)} (A'(2s+v) - A'(s+v)) ds \geq$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}(u-v)} A_1'(s) ds = A_1(\frac{1}{2}(u-v)) .$$

b) Sei $MP_{R(K)} \neq \emptyset$ und seien $f_1, f_2 \in MP_{R(K)}$; dann gilt:

$$\frac{1}{2}(f_1 + f_2) \in MP_{R(K)} \text{ und } \frac{1}{2}\phi_A(f_1) + \frac{1}{2}\phi_A(f_2) - \phi_A(\frac{1}{2}(f_1+f_2)) = 0 .$$

Aus a) folgt: $0 \geq \rho_{A_1}(\frac{1}{2}|f_1 - f_2|)$; da A_1 strikt monoton wachsend ist, erhält man: $f_1 = f_2$ fast überall.

(8.9) Beispiele:

Die Voraussetzung von (8.8) erfüllt:

1. A_p , $p \in [2, \infty)$ (wähle $A_1 = A_p$);
2. A_e (wähle $A_1 = A_e$).

Die Lemma (8.6) und (8.8) geben also zum Teil eine Antwort in der Problemstellung (E1).

In der Fragestellung von (E2) kann man eine sehr einfache, aber i. a. sehr einschränkende Bedingung angeben. Sie lautet:

$$(8.10) \quad (k - K) \cap Z(R) = \{\emptyset\} \quad \text{für jedes } k \in K.$$

Für interpolierende Splines, d. h. $K = f_0 + U$, U linearer Teilraum von $H_{A,m}$ ergibt sich daraus:

$$(8.11) \quad U \cap Z(R) = \{\emptyset\}.$$

Diese Bedingung ist meist erfüllt und sehr leicht nachprüfbar.

8.2 Existenzaussagen

(8.12) Satz:

Es gelte: i) A^* ist Y -Fkt.;

ii) $R(K)$ ist $\sigma(L_A, E_{A^*})$ -abgeschlossen.

Dann gilt:

(1) Es existiert ein N_A -Spline.

(2) Es existiert ein M_A -Spline, falls $P_A \cap R(K) \neq \emptyset$ gilt.

Beweis:

a) $r := \inf\{\|R(k)\|_A \mid k \in K\}$, $s := \inf\{\rho_A(R(k)) \mid k \in K\}$; $\Rightarrow 0 \leq r, s < \infty$.

Seien $(R(k_n))_{n \in \mathbb{N}}$, $(R(k_m))_{m \in \mathbb{N}}$ Folgen in $R(K)$ mit:

$r = \lim_n \|R(k_n)\|_A$, $s = \lim_m \rho_A(R(k_m))$; in jedem Falle sind die Folgen Norm-beschränkt (für $(R(k_m))_{m \in \mathbb{N}}$ folgt dies unmittelbar aus der Definition der Luxemburg-Norm (siehe (6.9))).

b) Da $L_A = (E_{A^*})^*$ gilt und E_{A^*} separabel ist ((6.15)), folgt (siehe [21], S.209):

Es existieren Teilfolgen $(R(k_{n'}))_{n' \in \mathbb{N}}$, $(R(k_{m'}))_{m' \in \mathbb{N}}$ und

$f_1, f_2 \in L_A$ mit: (a) $(R(k_{n'}))_{n' \in \mathbb{N}}$, $(R(k_{m'}))_{m' \in \mathbb{N}}$ sind

$\sigma(L_A, E_{A^*})$ -konvergent gegen f_1 bzw. f_2 ;

(b) $\|f_1\|_A \leq \liminf_{n'} \|R(k_{n'})\|_A = r$.

c) Wegen der Voraussetzung ii) existieren $k_1, k_2 \in K$ mit:

$R(k_i) = f_i$, $i=1,2$. Unmittelbar aus b) (b) folgt: $k_1 \in N_A(K)$.

d) Aus (3.23) folgt mit (6.14): ρ_A ist $\sigma(L_A, E_{A^*})$ -unterhalbstetig.

Also gilt: $\rho_A(R(k_2)) = \rho_A(f_2) \leq \liminf_{m'} \rho_A(R(k_{m'})) = s$; daraus folgt: $k_2 \in M_A(K)$. ■

(8.13) Bemerkung:

Dieser Satz (8.12) gestattet es, die Existenzfrage in den Räumen L_A zu untersuchen, für die $L_{A^*} \neq L_\infty$ gilt; einge-

geschlossen wird also auch das Problem der L_∞ -Splines, das von J. W. Jerome [9] behandelt wurde. Nicht untersucht werden kann die Existenzfrage in L_1 ($A(u) := |u|$); dazu ein Beispiel, das zeigt, daß schon bei einem einfachen Interpolationsproblem die Existenz eines Spline nicht gesichert ist.

(8.14) Beispiel:

Wir wählen: $I := [-1, 1]$, $A(u) := |u|$, $m = 2$,

$$K := \{f \in H_{1,2} \mid f(-1) = f(1) = 1, f(0) = 0\},$$

$$R : H_{1,2} \ni f \mapsto f'' \in L_1, x_0 \in K.$$

Dann gilt: $U := K - x_0$ ist linearer Teilraum von $H_{1,2}$,
 $\dim(R(U)^\perp) = 1$ und

$$(\#) \quad h(t) := \begin{cases} t+1 & , t \in [-1, 0] \\ 1-t & , t \in [0, 1] \end{cases}$$

ist eine Basisfunktion von $R(U)^\perp \subset L_\infty = L_1^*$.

Annahme: $N_A(K) \neq \emptyset$; sei $f_0 \in N_A(K)$ und $f_0 = x_0 + u_0$, $u_0 \in U$.

Dann ist u_0'' beste Approximation von $-x_0''$ in $R(U)$; daher existiert $g_0 \in R(U)^\perp$ mit (siehe I. Singer [20], S.46):

i) $\|g_0\|_\infty = 1$,

ii) $g_0(t)(-x_0''(t) + u_0''(t)) = |x_0''(t) + u_0''(t)|$ fast überall.

Daraus folgt mit (#): $\pm h(t)(x_0''(t) + u_0''(t)) = |x_0''(t) + u_0''(t)|$ fast überall; nun folgt: $f_0 \in P_1$. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu $P_1 \cap K = \emptyset$.

In §9 weisen wir für alle VY-Fkt. A , deren Konjugierte A^* eine Y-Fkt. ist, für obiges Beispiel die Existenz eines N_A -Spline nach.

Will man den Satz (8.12) auf konkrete Probleme anwenden, so besteht die Hauptaufgabe im Nachweis der Voraussetzung ii). Diese

Voraussetzung wollen wir nun näher untersuchen.

(8.15) Definition:

Sei $k_0 \in K$. Die Menge $K_\infty(k_0) := \bigcap_{a>0} a(K-k_0)$ heißt der asymptotische Kegel von K in k_0 .

Der asymptotische Kegel $K_\infty(k_0)$ hängt i. a. von k_0 ab; ist K jedoch abgeschlossen, so ist $K_\infty(k_0)$ unabhängig von k_0 (siehe [2], S.193); dies berechtigt dann dazu, vom asymptotischen Kegel K_∞ zu sprechen.

(8.16) Beispiele:

1. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_l \in H_{A,m}^*$, $r_1, \dots, r_l, s_1, \dots, s_l \in \mathbb{R}$;

$K := \{f \in H_{A,m} \mid r_i \leq \langle \lambda_i, f \rangle \leq s_i \text{ für } i=1, \dots, l\}$.

Dann gilt unter der Annahme: $K \neq \emptyset$:

$K_\infty = \{f \in H_{A,m} \mid \langle \lambda_i, f \rangle \leq 0 \text{ für } i=1, \dots, l\}$.

2. Sei $x_0 \in H_{A,m}$ und U abgeschlossener Teilraum in $H_{A,m}$.

Dann gilt: $K_\infty = U$.

(8.17) Satz:

Es gelte: a) $E_A = L_A$, $E_{A^*} = L_{A^*}$;

b) $R : H_{A,m} \rightarrow L_A$ ist stetiger linearer Operator mit: $R(H_{A,m})$ ist abgeschlossen;

c) $\dim(Z(R)) < \infty$ ($Z(R) := R^{-1}(0)$);

d) K ist abgeschlossen und es gilt: $K_\infty \cap Z(R) = \{0\}$.

Dann gilt:

Es existieren N_A - und M_A -Splines.

Beweis:

(α) Aus a) folgt: A^* ist Y-Fkt., $P_A \cap R(K) \neq \emptyset$ (siehe (6.16)).

Um also (8.12) anwenden zu können, müssen wir noch die Voraussetzung ii) in (8.12) nachweisen.

(β) Aus b)-d) folgt mit [9a], Lemma 2:

$R(K)$ ist abgeschlossen in L_A .

γ) Aus a) folgt mit (6.15): L_A ist reflexiv; also erhält man aus a) und (β) : $R(K)$ ist $\sigma(L_A, E_{A*})$ -abgeschlossen. ■

(8.18) Satz:

Sei $\mu(I) < \infty$ und A^* Y -Fkt.; κ sei ein Integralkern von R und K sei von der Form:

$K = \{f \in H_{A,m} \mid r_\lambda \leq \langle \lambda, f \rangle \leq s_\lambda, \lambda \in L\}$, wobei: $L \subset \Lambda(\kappa, E_{A*})$, $r_\lambda, s_\lambda \in \mathbb{R}$ mit $r_\lambda \leq s_\lambda$ (siehe 7.2).

Es gelte: a) $R(H_{A,m})$ ist $\sigma(L_A, E_{A*})$ -abgeschlossen

b) $\dim(Z(R)) =: q < \infty$

c) Es existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_q \in L$, die linear unabhängig über $Z(R)$ sind.

Dann gilt:

(1) Es existieren N_A -Splines.

(2) Es existieren M_A -Splines, falls $P_A \cap R(K) \neq \emptyset$ gilt.

Beweis:

Wir müssen, um Satz (8.12) anwenden zu können, zeigen:

$R(K)$ ist $\sigma(L_A, E_{A*})$ -abgeschlossen.

(α) Sei $(R(k_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $R(K)$, die $\sigma(L_A, E_{A*})$ -konvergent gegen ein $h \in R(H_{A,m})$ ist, d. h.

$$\lim_n \int_1 R(k_n(\xi))g(\xi)d\xi = \int_1 h(\xi)g(\xi)d\xi \text{ für alle } g \in E_{A*}.$$

O. E. kann angenommen werden:

$$\lim_n \langle \lambda_\nu, k_n \rangle = w_\nu \text{ mit: } r_{\lambda_\nu} \leq w_\nu \leq s_{\lambda_\nu}, \quad \nu=1, \dots, q.$$

(β) Seien $u_n \in Z(R)$ mit:

$$k_n(t) = u_n(t) + \int_1 \kappa(t, \xi) R(k_n(\xi)) d\xi, \quad t \in I, n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt für $\nu=1, \dots, q$:

$$\lim_n \langle \lambda_\nu, u_n \rangle = \lim_n \{ \langle \lambda_\nu, k_n \rangle - \int_1 \lambda_\nu(\xi) R(k_n(\xi)) d\xi \} =$$

$$= w_U - \int_I \lambda_{U,\kappa}(\xi) h(\xi) d\xi =: w'_U;$$

wegen b) und c) existiert $\tilde{u} \in Z(R)$ mit: $\langle \lambda_U, \tilde{u} \rangle = w'_U$, $U=1, \dots, q$.

Über $Z(R)$ ist jedes $\lambda \in H_{A,m}^*$ linear abhängig von $\lambda_1, \dots, \lambda_q$;

also gilt: $\langle \lambda, \tilde{u} \rangle = \lim_n \langle \lambda, u_n \rangle$ für alle $\lambda \in L$.

(v) Sei k definiert durch: $k(t) := \tilde{u}(t) + \int_I \kappa(t, \xi) h(\xi) d\xi$, $t \in I$.

Dann gilt:

i) $k \in H_{A,m}$ und $R(k) = h$.

$$\begin{aligned} \text{ii) } \langle \lambda, k \rangle &= \langle \lambda, \tilde{u} \rangle + \int_I \lambda_{\kappa}(\xi) R(k(\xi)) d\xi = \\ &= \lim_n \langle \lambda, u_n \rangle + \lim_n \int_I \lambda_{\kappa}(\xi) R(k_n(\xi)) d\xi = \lim_n \langle \lambda, k_n \rangle. \end{aligned}$$

Also erhält man: $k \in K$ und $h = R(k) \in R(K)$.

Aus (8.12) folgt die Behauptung. ■

8.3 Duale Variationsprobleme

Unmittelbar aus der Definition der Splines (siehe (8.1)) folgt:

(1) k_0 ist N_A -Spline genau dann, wenn gilt:

$$\|R(k_0)\|_A = \min\{\delta_K(f) - (-\|R(f)\|_A) \mid f \in H_{A,m}\}.$$

(2) k_0 ist M_A -Spline genau dann, wenn gilt:

$$\rho_A(R(k_0)) = \min\{\delta_K(f) - (-\rho_A(R(f))) \mid f \in H_{A,m}\} < \infty.$$

Die Minimumprobleme in (1) und (2) haben die Gestalt von Variationsproblemen, wie sie in 3.3 betrachtet wurden. Um mit Lemma (3.16) einen Charakterisierungssatz für Splines zu gewinnen, ist zunächst die Gültigkeit der Aussage in (3.15) zu untersuchen.

Zur Abkürzung führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$(1) \quad F_A : H_{A,m} \ni f \mapsto -\|R(f)\|_A \in \mathbb{R};$$

$$\tilde{F}_A : L_A \ni g \mapsto -\|g\|_A \in \mathbb{R}.$$

$$(2) \quad G_A : H_{A,m} \ni f \mapsto -\rho_A(R(f)) \in \mathbb{R};$$

$$\tilde{G}_A : L_A \ni g \mapsto -\rho_A(g) \in \mathbb{R}.$$

(8.19) Folgerungen:

a) F_A, G_A sind konkave Funktionen auf $H_{A,m}$.

b) $\tilde{F}_A, \tilde{G}_A$ sind konkave Funktionen auf L_A .

(8.20) Lemma:

Es gilt:

$$\inf\{\delta_K(f) - F_A(f) \mid f \in H_{A,m}\} = \max\{F_A^+(\lambda) - \delta_K^*(\lambda) \mid \lambda \in H_{A,m}^*\}.$$

Beweis:

F_A ist stetig in $H_{A,m}$; (3.15). ■

(8.21) Bemerkungen:

$$1. \quad F_A^+(\lambda) = \begin{cases} 0 & , \|\lambda\| \leq 1 \\ -\infty & , \|\lambda\| \geq 1 \end{cases}$$

$$2. \quad \delta_K^*(\lambda) = \sup\{\langle \lambda, k \rangle \mid k \in K\}.$$

(8.22) Lemma:

Es gelte:

$$(DC) \quad \bigvee_{\bar{k} \in K \cap R^{-1}(P_A)} \bigvee_{\bar{r} > 1} \bigwedge_{(f_n) \in H_{A,m}} (f_n \rightarrow \bar{k} \Rightarrow \rho_A(\bar{r}R(f_n)) < \infty \text{ für alle } n \in \mathbb{N}).$$

Dann gilt:

$$\inf\{\delta_K(f) - G_A(f) \mid f \in H_{A,m}\} = \max\{G_A^+(\lambda) - \delta_K^*(\lambda) \mid \lambda \in H_{A,m}^*\}.$$

Beweis:

Nach (6.18) ist G_A in $\bar{K}$ stetig; (3.15). ■

(8.23) Bemerkung:

Die Voraussetzung von (8.22) ist nach (6.16) stets erfüllt, falls $E_A = L_A$ gilt.

Mit R^* bezeichnen wir im folgenden den adjungierten Operator von R , der folgendermaßen definiert ist:

$R^* : L_A^* \ni \lambda \mapsto R^*(\lambda) \in H_{A,m}^*$ wobei $R^*(\lambda)$ eindeutig durch folgende Gleichung definiert ist: $\langle R^*(\lambda), f \rangle = \langle \lambda, R(f) \rangle$ für alle $f \in H_{A,m}$.

(8.24) Lemma:

Sei R surjektiv. Dann gilt:

$$a) \quad \text{dom}(F_A^+) = R^*(\text{dom}(\tilde{F}_A^+));$$

$$b) \quad \text{dom}(G_A^+) = R^*(\text{dom}(\tilde{G}_A^+)).$$

Beweis:

Zu a): Sei $\lambda \in \text{dom}(F_A^+)$; sei $z \in Z(R)$; dann folgt:

$$\begin{aligned} -\infty < F_A^+(\lambda) &= \inf\{\langle \lambda, f \rangle + \|R(f)\|_A \mid f \in H_{A,m}\} = \\ &= \inf\{\langle \lambda, f+z \rangle + \|R(f)\|_A \mid f \in H_{A,m}\} = F_A^+(\lambda) + \langle \lambda, z \rangle; \end{aligned}$$

also gilt: $\lambda \in Z(R)^\perp$. Da $\text{Bild}(R^*) = Z(R)^\perp$ gilt,¹⁾ existiert $\eta \in L_A^*$ mit: $R^*(\eta) = \lambda$.

$$\begin{aligned} \tilde{F}_A^+(\eta) &= \inf\{\langle \eta, g \rangle + \|g\|_A \mid g \in L_A\} = \inf\{\langle \eta, R(f) \rangle + \|R(f)\|_A \mid f \in H_{A,m}\} = \\ &= \inf\{\langle R^*(\eta), f \rangle + \|R(f)\|_A \mid f \in H_{A,m}\} = F_A^+(R^*(\eta)) = F_A^+(\lambda) > -\infty; \end{aligned}$$

also gilt: $\eta \in \text{dom}(\tilde{F}_A^+)$. Damit gilt: " $\subset$ ".

Sei $\eta \in \text{dom}(\tilde{F}_A^+)$; $\lambda := R^*(\eta)$; dann folgt:

$$\begin{aligned} F_A^+(\lambda) &= \inf\{\langle \lambda, f \rangle + \|R(f)\|_A \mid f \in H_{A,m}\} = \inf\{\langle \eta, R(f) \rangle + \|R(f)\|_A \mid f \in H_{A,m}\} \\ &= \tilde{F}_A^+(\eta) > -\infty; \end{aligned}$$

also gilt: $\lambda \in \text{dom}(F_A^+)$. Damit gilt: " $\supset$ ".

Zu b): Analog a).

¹⁾ siehe etwa [4], S.58 ff.

(8.25) Folgerungen:

Sei R surjektiv und es gelte: $E_A = L_A$.

Dann gilt:

$$(1) \quad \text{dom}(F_A^+) = R^*(\{g \in L_{A*} \mid \|g\|_{(A*)} \leq 1\}).$$

$$(2) \quad \text{dom}(G_A^+) = R^*(P_{A*}).$$

Beweis:

Zu (1): $\text{dom}(\tilde{F}_A^+) = \{\lambda \in L_A^* \mid \|\lambda\| \leq 1\} = \{g \in L_{A*} \mid \|g\|_{(A*)} \leq 1\}$ nach (6.15).

Mit (8.24) folgt die Behauptung.

Zu (2): $\text{dom}(\tilde{G}_A^+) = \{\lambda \in L_A^* \mid \rho_A^*(\lambda) < \infty\} = \{g \in L_{A*} \mid \rho_{A*}(g) < \infty\}$ nach (6.15)

und (3.24). Mit (8.24) folgt nun die Behauptung. ■

8.4 Charakterisierung

(8.26) Satz:

Für $k_0 \in H_{A,m}$ ist äquivalent:

a) k_0 ist N_A -Spline.

b) $\partial \delta_K(k_0) \cap \partial F_A(k_0) \neq \emptyset$.

Beweis:

Folgt aus (3.16) mit (8.20).

(8.27) Folgerung:

Sei R surjektiv. Dann ist für $k_0 \in H_{A,m}$ äquivalent:

a) k_0 ist N_A -Spline.

b) $\partial \delta_K(k_0) \cap R^*(\partial \tilde{F}_A(R(k_0))) \neq \emptyset$.

Beweis:

Es gilt: $R^*(\partial \tilde{F}_A(R(k_0))) = \partial F_A(k_0)$. Denn:

i) Sei $\lambda \in \partial \tilde{F}_A(R(k_0))$; dann gilt für alle $f \in H_{A,m}$:

$$\langle R^*(\lambda), f - k_0 \rangle = \langle \lambda, R(f) - R(k_0) \rangle \geq \tilde{F}_A(R(f)) - \tilde{F}_A(R(k_0));$$

also gilt: $R^*(\lambda) \in \partial F_A(k_0)$.

ii) Sei $\eta \in \partial F_A(k_0)$; sei $z \in Z(R)$; für $f := k_0 + z$ gilt dann:

$$\langle \eta, z \rangle = \langle \eta, f - k_0 \rangle \geq F_A(f) - F_A(k_0) = \|R(f)\|_A - \|R(k_0)\|_A = 0;$$

da also $\eta \in Z(R)^\perp$ gilt, existiert $\lambda \in L_A^*$ mit: $\eta = R^*(\lambda)$.

Damit gilt (beachte: R ist surjektiv) für jedes $g = R(f)$:

$$\begin{aligned} \langle \lambda, g - R(k_0) \rangle &= \langle R^*(\lambda), f - k_0 \rangle = \langle \eta, f - k_0 \rangle \geq F_A(f) - F_A(k_0) = \\ &= \tilde{F}_A(g) - \tilde{F}_A(R(k_0)); \text{ also gilt: } \lambda \in \partial \tilde{F}_A(R(k_0)). \end{aligned}$$

Aus (8.26) folgt nun die Behauptung. ■

(8.28) Bemerkung:

Gilt $E_A = L_A$, so ist $\|\cdot\|_A$ Gateauxdifferenzierbar in

$L_A \setminus \{0\}$, d. h. für $f_0 \in L_A \setminus \{0\}$ gilt:

$\Delta_A(f_0, f) := \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} \{ \|f_0 + tf\|_A - \|f_0\|_A \}$ existiert für alle $f \in L_A$ und es gilt: $\Delta_A(f_0, \cdot) \in L_A^* = L_{A^*}$ (siehe [17b]).

(8.29) Folgerung:

Sei R surjektiv und es gelte: $E_A = L_A$.

Dann ist äquivalent für $k_0 \in H_{A,m}$:

a) k_0 ist N_A -Spline.

b) $-R^* \circ \Delta_A(R(k_0), \cdot) \in \partial \delta_K(k_0)$.

Beweis:

Es gilt: $\partial \tilde{F}_A(R(k_0)) = \{-\Delta_A(R(k_0), \cdot)\}$ ([8a], S.28). Mit (8.27) und (8.28) folgt nun die Behauptung. ■

Bei der Charakterisierung von N_A -Splines (Satz (8.26)) kann man (3.16) ohne zusätzliche Voraussetzung anwenden, da stets die Aussage von (3.15) gilt. Anders liegt der Fall bei M_A -Splines, da die Aussage von (8.22) nur mit einer zusätzlichen Voraussetzung gilt. Es ist also angebracht, hier hinreichende und

notwendige Bedingungen für: $k_0 \in M_A(K)$ zu trennen.

(8.30) Satz:

Für $k_0 \in H_{A,m}$ betrachte folgende Aussagen:

a) k_0 ist M_A -Spline.

b) $\partial \delta_K(k_0) \cap \partial G_A(k_0) \neq \emptyset$.

Dann gilt stets: b) $\Rightarrow$ a). Unter der Voraussetzung (DC) in (8.22) gilt auch: a) $\Rightarrow$ b).

Beweis:

"b) $\Rightarrow$ a)": (3.14). "a) $\Rightarrow$ b)": (8.22) und (3.16). ■

(8.31) Bemerkung:

Gilt $E_A = L_A$, so sind die Aussagen in (8.30) äquivalent.

(8.32) Folgerung:

Sei R surjektiv. Für $k_0 \in H_{A,m}$ betrachte folgende Aussagen:

a) k_0 ist M_A -Spline.

b) $\partial \delta_K(k_0) \cap R^*(\partial \tilde{G}_A(R(k_0))) \neq \emptyset$.

Dann gilt stets: b) $\Rightarrow$ a). Unter der Voraussetzung (DC) in (8.22) gilt auch: a) $\Rightarrow$ b).

Beweis:

Man beweist wie im Beweis von (8.27): $R^*(\partial \tilde{G}_A(R(k_0))) = \partial G_A(k_0)$ und folgert dann mit (8.30) die Behauptung. ■

(8.33) Folgerung:

Sei R surjektiv und es gelte: $E_A = L_A$.

Dann ist für $k_0 \in H_{A,m}$ äquivalent:

a) k_0 ist M_A -Spline.

b) Es existiert $g \in L_{A*}$ mit: i) $R(k_0(t)) \in \partial A^*(g(t))$ f. ü.
ii) $-F^*(g) \in \partial \delta_K(k_0)$.

Beweis:

Aus (3.24) (wähle dort: $L = L_A$, $L^* = L_{A^*}$, $B = A$) folgt mit (8.32) und (8.31) die Behauptung (beachte dabei: $u \in \partial A(v) \Leftrightarrow v \in \partial A^*(u)$ nach (3.10)).

Die Sätze (8.26) und (8.30) mit Folgerungen zeigen, daß für die Charakterisierung von Splines entscheidend ist, das Subdifferential von δ_K zu kennen. In dieser Frage hilft in vielen Fällen ein Satz von R. T. Rockafellar weiter.

(8.34) Satz:

Sei X l.k. R., Ω kompakter Hausdorff Raum und $(F_\omega)_{\omega \in \Omega}$ eine Familie konvexer Gateauxdiff. Funktionen auf X in $\mathbb{R}$.

$C := \{x \in X \mid F_\omega(x) \leq 0 \text{ für alle } \omega \in \Omega\}$.

Es gelte: i) $\Omega \ni \omega \rightarrow F_\omega(x) \in \mathbb{R}$ ist stetig für jedes $x \in X$

ii) $\sup\{F_\omega(\bar{x}) \mid \omega \in \Omega\} < 0$ für ein $\bar{x} \in X$.

Dann ist äquivalent für $x_0 \in C$:

a) $\varphi \in \partial \delta_C(x_0)$.

b) Es existiert ein endliches Borelmaß $\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit:

(1) $\mu(\omega) = 0$, falls $F_\omega(x_0) < 0$,

$\mu(\omega) \leq 0$, falls $F_\omega(x_0) = 0$;

(2) $\langle \varphi, x \rangle = \int_\Omega \langle \nabla F_\omega(x_0), x \rangle d\mu(\omega)$ für alle $x \in X$.

Beweis:

[16a], S. 45.

In §9 werden wir diesen Satz anwenden.

§9 Hermite-Birkhoff-Interpolation mit Ungleichungen

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse des §8 auf das Problem der Hermite-Birkhoff-Interpolation mit Ungleichungen angewendet. Probleme dieser Art wurden von O. L. Mangasarian und L. L. Schumaker [14] mit den Hilfsmitteln der Kontrolltheorie untersucht. Zum Abschluß dieses Paragraphen geben wir in einem einfachen Beispiel einige Splines an.

9.1 Problemstellung

Wir betrachten folgende Situation:

- (P1) A VY-Fkt.;
- (P2) $I := [a, b]$ endliches Intervall; $m \in \mathbb{N}$;
- (P3) $R : H_{A,m}(I) \ni f \mapsto \sum_{j=0}^m a_j(\cdot) f^{(j)}(\cdot) \in L_A(I)$ mit:
 $a_j \in C^j(I), j=0, \dots, m, a_m(t) \neq 0$ für alle $t \in I$;
- (P4) $L \subset \Lambda(\kappa, E_{A*})$ (κ Integralkern von R (siehe (7.7)));
 $f_0 \in H_{A,m}$;
- (P5) $I_1, \dots, I_k$ seien abgeschlossene Mengen in I ;
- (P6) $T_i : H_{A,m} \ni f \mapsto \sum_{j=0}^{m-1} b_{ij}(\cdot) f^{(j)}(\cdot) \in L_A$ mit:
 $b_{ij} \in C(I), j=0, \dots, m-1, i=1, \dots, k$;
- (P7) $u_i, o_i \in C(I_i)$ mit: $u_i(t) < o_i(t)$ für alle $t \in I_i, i=1, \dots, k$.

Damit führen wir folgende Bezeichnungen ein:

- (a) $U := \{f \in H_{A,m} \mid \langle \lambda, f \rangle = 0, \lambda \in L\}; \quad V(f_0) := f_0 + U$.
- (b) Für $i=1, \dots, k$:
 $U_i := \{f \in H_{A,m} \mid u_i(t) \leq T_i(f(t)) \leq o_i(t), t \in I_i\};$
 $\tilde{U}_i := \{f \in H_{A,m} \mid u_i(t) < T_i(f(t)) < o_i(t), t \in I_i\}.$

$$(c) \quad K := \bigcap_{i=1}^k U_i \cap V(f_0); \quad \tilde{K} := \bigcap_{i=1}^k \tilde{U}_i \cap V(f_0).$$

Im folgenden wird nun die Existenz- und Charakterisierungsfrage für das in (c) definierte K untersucht.

(9.1) Bemerkungen:

1. Wählt man in (P5) $I_1 = \dots = I_k = \emptyset$, so erhält man ein reines Interpolationsproblem.
2. Wählt man in (P4) $L = \emptyset$, so erhält man ein Interpolationsproblem mit echten Ungleichungen.
3. Wählt man $I_i = \{t_i\}$, $t_i \in I_i$, und L als eine Menge von Punktfunktionalen, so erhält man ein Hermite-Birkhoff-Interpolationsproblem.

9.2 Existenz

(9.2) Bezeichnungen:

1. Sei $i \in \{1, \dots, k\}$ und $t \in I_i$:

$$T_{i,t} : H_{A,m} \ni f \mapsto T_i(f(t)) \in \mathbb{R}.$$
2. $\tilde{L} := L \cup \{T_{i,t} \mid t \in I_i, i=1, \dots, k\}.$

(9.3) Folgerung:

Es gilt: $\tilde{L} \subset \Lambda(\kappa, E_{A*})$.

Beweis: (7.10).

Aus (8.18) gewinnen wir den folgenden Existenzsatz; dabei ist berücksichtigt, daß $\dim(Z(R)) = m$ gilt.

(9.4) Satz:

Es gelte: a) R ist surjektiv;

b) A^* ist Y -Fkt.;

c) Es existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \tilde{L}$, die über $Z(R)$ linear unabhängig sind.

Dann gilt:

(1) Es existieren N_A -Splines.

(2) Es existieren M_A -Splines, falls $P_A \cap R(K) \neq \emptyset$ gilt.

9.3 Charakterisierung

Wir wollen zunächst das Subdifferential $\partial \delta_K$, das bei der Charakterisierung von Splines auftritt, berechnen.

(9.5) Lemma:

Es gilt für $k \in K$:

$$(1) \sum_{i=1}^k \partial \delta_{U_i}(k) + U^\perp \subset \partial \delta_K(k).$$

$$(2) \sum_{i=1}^k \partial \delta_{U_i}(k) + U^\perp = \partial \delta_K(k), \text{ falls } \tilde{K} \neq \emptyset \text{ gilt.}$$

Beweis:

(1) Folgt unmittelbar aus der Definition der Subgradienten.

(2) Folgt aus einem Lemma von Moreau und Rockafellar (siehe [8a], S.25).

Lemma (9.5) führt also die Frage nach $\partial \delta_K$ auf die Berechnung der $\partial \delta_{U_i}$ zurück.

(9.6) Lemma:

Sei $i \in \{1, \dots, k\}$ und $k \in U_i$.

Es gelte: $\tilde{U}_i \neq \emptyset$. Dann ist äquivalent für $\lambda \in H_{A,m}^*$:

a) $\lambda \in \partial \delta_{U_i}(k)$.

b) Es existiert ein endliches Borelmaß $\mu_i : I_i \rightarrow \mathbb{R}$

mit: i) $\mu_i(t) \geq 0$, falls $T_{i,t}(k) = u_i(t)$,

$\mu_i(t) \leq 0$, falls $T_{i,t}(k) = o_i(t)$,

$\mu_i(t) = 0$, falls $u_i(t) < T_{i,t}(k) < o_i(t)$;

ii) Für jedes $f \in H_{A,m}$ gilt:

$$\langle \lambda, f \rangle = \int_{I_i} T_i(f(t)) d\mu_i(t)$$

Beweis:

1. $U_i = \{f \in H_{A,m} \mid F_{i,t}^j(f) \leq 0, t \in I_i, j=1,2\}$ mit:

$$F_{i,t}^1(f) := T_{i,t}(f) - o_i(t), F_{i,t}^2(f) := u_i(t) - T_{i,t}(f).$$

2. Für jedes $f \in H_{A,m}$ ist die Abbildung $I_i \ni t \mapsto F_{i,t}^j(f) \in \mathbb{R}$, $j=1,2$, stetig.

3. Für $f \in \tilde{U}_i$ gilt: $\sup\{F_{i,t}^j(f) \mid t \in I_i, j=1,2\} < 0$.

4. Die Funktionale $F_{i,t}^j$ sind differenzierbar und es gilt:

$$\nabla F_{i,t}^1(k, f) = T_i(f(t)), \quad \nabla F_{i,t}^2(k, f) = -T_i(f(t)).$$

Damit sind die Voraussetzungen des Satzes (8.34) erfüllt und es folgt die Behauptung. ■

(9.7) Satz:

Sei R surjektiv und es gelte: $\tilde{K} \neq \emptyset$.

Dann ist äquivalent für $k_0 \in H_{A,m}$:

a) k_0 ist N_A -Spline.

b) Es existieren $\Psi \in \partial F_A(R(k_0))$, $\lambda \in U^+$ und endliche Borel-maße $\mu_i : I_i \rightarrow \mathbb{R}$, $i=1, \dots, k$, so daß gilt:

$$i) \quad \langle \Psi, R(f) \rangle = \sum_{i=1}^k \int_{I_i} T_i(f(t)) d\mu_i(t) + \langle \lambda, f \rangle, \quad f \in H_{A,m};$$

ii) $\mu_i(t) \geq 0$, falls $T_{i,t}(k_0) = u_i(t)$,

$$\mu_i(t) \leq 0, \text{ falls } T_{i,t}(k_0) = o_i(t),$$

$$\mu_i(t) = 0, \text{ falls } u_i(t) < T_{i,t}(k_0) < o_i(t), i=1, \dots, k;$$

Beweis:

(8.27) und (9.6).

(9.8) Satz:

Sei R surjektiv und es gelte: $\tilde{K} \neq \emptyset$, (DC) in (8.22).

Dann ist äquivalent für $k_0 \in H_{A,m}$:

a) k_0 ist M_A -Spline.

b) Es existieren $\Psi \in \partial \tilde{G}_A(R(k_0))$, $\lambda \in U^\perp$ und endliche Borelmaße $\mu_i: I_i \rightarrow \mathbb{R}$, $i=1, \dots, k$, so daß gilt:

$$i) \quad \langle \Psi, R(f) \rangle = \sum_{i=1}^k \int_{I_i} T_i(f(t)) d\mu_i(t) + \langle \lambda, f \rangle, \quad f \in H_{A,m};$$

$$ii) \quad \mu_i(t) \geq 0, \text{ falls } T_{i,t}(k_0) = u_i(t),$$

$$\mu_i(t) \leq 0, \text{ falls } T_{i,t}(k_0) = o_i(t),$$

$$\mu_i(t) = 0, \text{ falls } u_i(t) < T_{i,t}(k_0) < o_i(t), i=1, \dots, k.$$

Beweis:

(8.32) und (9.6).

(9.9) Bemerkungen:

1. Die Folgerungen (8.29) und (8.33) lassen sich mit Hilfe von (9.6) analog (9.7) und (9.8) formulieren.
2. Gilt $L = \{\lambda_1, \dots, \lambda_l\}$ (siehe (P4) in 9.1), so gilt: $U^\perp = \text{span}\{\lambda_1, \dots, \lambda_l\}$ (siehe [4], S.59).
3. Von Mangasarian und Schumaker [14] wurden mit Hilfe von Sätzen aus der Kontrolltheorie ähnliche Charakterisierungssätze angegeben.

9.4 Beispiel

Wir wählen in 9.1:

- $I := [-2, 2], m := 2;$
- $R : H_{A,2} \ni f \mapsto f'' \in L_A;$
- $L := \{\lambda\}$ mit: $\lambda : H_{A,2} \ni f \mapsto f(1) \in \mathbb{R}, f_0(t) := t^2.$
- $I_1 := \{-1\}, I_2 := \{0\};$
- $T_1 : H_{A,2} \ni f \mapsto f(-1), T_2 : H_{A,2} \ni f \mapsto f(0);$
- $u_1 := 1, o_1 := 3/2, u_2 := -1/4, o_2 := 0.$

Dann folgt:

1. $U = \{f \in H_{A,2} \mid f(1) = 0\};$
2. $U_1 = \{f \in H_{A,2} \mid 1 \leq f(-1) \leq 3/2\}, U_2 = \{f \in H_{A,2} \mid -1/4 \leq f(0) \leq 0\};$
3. $V(f_0) = \{f \in H_{A,2} \mid f(1) = 1\};$
4. $\tilde{K} \neq \emptyset.$

(9.10) $A_p(u) := p^{-1} |u|^p, p \in (1, \infty).$

$$k_p(t) := \begin{cases} 1 - r_p(t+1) & , t \in [-2, -1) \\ 1 - r_p(t+1) + s_p(t+1) r_p & , t \in [-1, 0) \\ 1 - r_p(1-t) + s_p(1-t) r_p & , t \in [0, 1) \\ 1 - r_p(1-t) & , t \in [1, 2] \end{cases} ,$$

$$g_p(t) := \begin{cases} 0 & , t \in [-2, -1) \\ -r_p(t+1) & , t \in [-1, 0) \\ -r_p(1-t) & , t \in [0, 1) \\ 0 & , t \in [1, 2] \end{cases} ,$$

mit: $r_p = (2p-1)(p-1)^{-1}, s_p = (p-1)p^{-1}.$

Dann gilt:

1. $k_p \in K.$
2. $g_p \in -\partial_{A_p}(k_p) = \partial \tilde{g}_{A_p}(k_p)$ (beachte (3.24)).

$$\begin{aligned} 3. \quad \langle g_p, f'' \rangle &= \int_{-2}^2 g_p(t) f''(t) dt = \\ &= \mu_1(-1) T_1(f(-1)) + \mu_2(0) T_2(f(0)) + \langle \eta, f \rangle \end{aligned}$$

$$\text{mit: } \mu_1(-1) = -r_p < 0,$$

$$\mu_2(0) = 2r_p > 0,$$

$$\eta = -\lambda \in U^\perp.$$

Also folgt aus (9.8): k_p ist M_{A_p} -Spline und damit auch N_{A_p} -Spline.

$$(9.11) \quad A(u) := \begin{cases} 0 & , |u| \leq 2 \\ \infty & , |u| > 2 \end{cases} \quad (L_A = L_\infty),$$

$$k_\infty(t) := \begin{cases} 1 - 2(t+1) & , t \in [-2, -1) \\ t^2 & , t \in [-1, 1) \\ 1 - 2(1-t) & , t \in [1, 2] \end{cases} ,$$

$$g_\infty(t) := \begin{cases} 0 & , t \in [-2, -1) \\ -(t+1) & , t \in [-1, 0) \\ -(1-t) & , t \in [0, 1) \\ 0 & , t \in [1, 2] \end{cases} .$$

Dann gilt:

$$1. \quad k_\infty \in K;$$

$$2. \quad k_\infty \text{ ist } M_A\text{-Spline (beachte } \rho_A(k_\infty) = 0);$$

$$3. \quad g_\infty \in \partial \tilde{F}_A(k_\infty), \text{ denn:}$$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 g_\infty(t) (f''(t) - k_\infty''(t)) dt &= 2 - (f(-1) - 2f(0) + f(1)) \geq \\ &\|k_\infty''\|_\infty - \|f''\|_\infty \quad (\text{nach Mittelwertsatz}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad \langle g_\infty, f'' \rangle &= \int_{-2}^2 g_\infty(t) f''(t) dt = \\ &= \mu_1(-1) T_1(f(-1)) + \mu_2(0) T_2(f(0)) + \langle \eta, f \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mit: } \mu_1(-1) &= -1 < 0, \\ \mu_2(0) &= 2 > 0, \\ \eta &= -\lambda \in U^\perp. \end{aligned}$$

Also folgt aus (9.7): k_∞ ist N_A -Spline.

$$(9.12) \quad \underline{A_1(u) := (1+|u|)\log(1+|u|) - |u|}.$$

Sei r eine Lösung von: $e^s(s^{-1} - s^{-2}) + s^{-2} - 3/2 = 0$

(r ist eindeutig bestimmt und es gilt: $r \in (1,2)$).

$$k_1(t) := \begin{cases} 1 - (r^{-1}e^r - 1)(t+1) & , t \in [-2, -1] \\ 1 - (r^{-1}e^{r - \frac{1}{2}(1-t)} - 1)(t+1) + r^{-2}(e^{r(t+1)} - 1), & t \in [-1, 0] \\ 1 - (r^{-1}e^{r - \frac{1}{2}(t+1)} - 1)(1-t) + r^{-2}(e^{r(1-t)} - 1), & t \in [0, 1] \\ 1 - (r^{-1}e^r - 1)(1-t) & , t \in [1, 2] \end{cases}$$

$$g_1(t) := \begin{cases} 0 & , t \in [-2, -1] \\ -r(t+1) & , t \in [-1, 0] \\ -r(1-t) & , t \in [0, 1] \\ 0 & , t \in [1, 2] \end{cases}$$

Dann gilt:

1. $k_1 \in K$;
2. $g_1 \in -\partial \rho_{A_1}(k_1'') = \partial \tilde{G}_{A_1}(k_1'')$ (beachte (3.24));
3. $\langle g_1, f'' \rangle = \int_{-2}^2 g_1(t) f''(t) dt =$
 $= \mu_1(-1) T_1(f(-1)) + \mu_2(0) T_2(f(0)) + \langle \eta, f \rangle$

$$\begin{aligned} \text{mit: } \mu_1(-1) &= -r < 0, \\ \mu_2(0) &= 2r > 0, \\ \eta &= -\lambda \in U^\perp. \end{aligned}$$

Also folgt aus (9.8): k_1 ist M_{A_1} -Spline.

(9.13) Bemerkungen:

1. Es gilt: a) $k_p \in C^2([-2,2]) \setminus C^3([-2,2])$;

b) $k_\infty \in C^1([-2,2]) \setminus C^2([-2,2])$;

c) $k_1 \in C^2([-2,2]) \setminus C^3([-2,2])$.

2. Es gilt: $k_\infty(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} k_p(t)$ für alle $t \in [-2,2]$.

Literatur

1. Anselone, P.M. und Laurent, P.J.: A general method for the constructing of interpolating or smoothing spline-functions. Num. Math. 12 (1968), 66-82.
2. Atteia, M.: Fonctions "spline" definies sur un ensemble convexe. Num. Math. 12 (1968), 192-210.
3. Fletcher, R. und Powell, M.J.D.: A rapidly convergent descent method for minimization. Computer J. 6 (1963), 163-169.
4. Goldberg, S.: Unbounded linear operators. McGraw-Hill Book Company, New York (1966).
5. Golomb, M.:
 - a) Splines, n-widths and optimal approximations. MRC-Technical Summary Report No. 784, Madison, Wisconsin (1967).
 - b) $H^{m,p}$ -Extensions by $H^{m,p}$ -Splines. J. of Appr. Theory 7 (1972), 238-275.
6. Gröger, K.: Eine Verallgemeinerung der Sobolevschen Räume und ihre Anwendung zur Lösung von Variationsproblemen. Math. Nachr. 32 (1966), 115-130.
7. Holladay, J.C.: Smoothest curve approximation. Math. Tables Aids Computations 11 (1957), 233-243.

8. Holmes, R. B.:

- a) A Course on Optimization and Best Approximation. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 257; Springer-Verlag, 1972.
- b) R - Splines in Banach spaces I. J. of math. anal. appl. 40 (1972), 574-593.

9. Jerome, J. W.:

- a) Minimization problems and linear and nonlinear spline functions, I: Existence. SIAM J. Num. Anal. 10 (1973), 808-819.
- b) Minimization problems and linear and nonlinear spline functions, II: Convergence. SIAM J. Num. Anal. 10 (1973), 820-830.

10. Jerome, J. W. und Schumaker, L. L.: On Lagrange-splines.

J. of Appr. Theory 2 (1969), 29-49.

11. Krasnoselskii, M. A. und Rutickii, Y. B.: Convex functions and Orlicz spaces. P. Nordhoff Ltd. - Groningen, 1961.

12. Laurent, P. J.: Construction of spline functions in a convex set. Approximations with Special Emphasis on Spline Functions, I. Schoenberg Ed., Academic Press, New York, 1969, 415-446.

13. Luxemburg, W. A. J.: Banach function spaces. Thesis, Technische Hogeschool te Delft, 1955.

14. Mangasarian, O. L. und Schumaker, L. L.: Splines via optimal control. Approximations with Special Emphasis on Spline Functions, I. Schoenberg Ed., Academic Press, New York, 1969, 119-156.
15. Orlicz, W.: Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B. Bulletin intern. de l'Academie Pol., serie A, 1932, 207-220.
16. Rockafellar, R. T.:
 - a) Convex functions, monotone operators and variational inequalities. Theory and Applications of Monotone Operators (Proc. NATO Advanced Study Institute, Venice, 1968), 35-65.
 - b) Integrals which are convex functionals I. Pac. J. of math. 24 (1968), 525-539.
 - c) Integrals which are convex functionals II. Pac. J. of math. 39 (1971), 439-469.
 - d) Convex integral functionals and duality. Contributions to Nonlinear Functional Analysis, E. Zarantonello Ed., Academic Press, New York, 1971.
17. Rao, M. M.:
 - a) Linear functionals in Orlicz spaces. Nieuw Archief voor wiskunde 12 (1964), 77-98.
 - b) Smoothness of Orlicz spaces. Indag. Math. 27 (1965), 671-690.

18. Schaback, R.:

- a) Spezielle rationale Splinefunktionen. Preprint 1971.
- b) Interpolation mit nichtlinearen Klassen von Splinefunktionen. Preprint 1971.

19. Schoenberg, I. J.: Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions.

Quart. Appl. Math. 4 (1946), 45-99, 112-141.

20. Singer, I.: Best approximation in normed spaces by elements of linear subspaces. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

21. Taylor, A. E.: Introduction to Functional Analysis.

John Wiley, New York, 1958.

22. Wells, M.: Function minimization.

Communication of the ACM 8 (1965), 169-170.

Lebenslauf

Geboren am: 7. März 1944

Geburtsort: Oberzeitldorn/Ndb.

Schulbildung: 1950 - 1955 Volksschule in Pondorf a/D
1955 - 1964 Hum. Gymnasium in Straubing
1964 Reifeprüfung

Wehrdienst: Okt. 1964 - Sept. 1966

Studium: WS 1966 - SS 1971 Universität München
Juli 1971 Diplom-Hauptexamen im Fach
Mathematik
Okt. 1971 - Juli 1972 Wissenschaftliche
Hilfskraft am Mathematischen
Institut der Universität München
Aug. 1972 bis jetzt Förderung nach dem
Graduiertenförderungsgesetz

